

Inhaltsübersicht

Regelungstechnik 1

Modellieren, Simulieren, Steuern und Regeln dynamischer Systeme

Kapitel 1	Überblick
Kapitel 2	Einführendes Beispiel: Fahrgeschwindigkeitsregelung eines Autos
Kapitel 3	Dynamisches Verhalten linearer Systeme
Kapitel 4	Einfache analoge und digitale Regelsysteme
Labor 1	Simulieren mit Matlab/Simulink
Labor 2	Analoge und Digitale Regelungen

Moodle: Regelungstechnik 1 für TIB4/IEP4

<https://moodle.hs-esslingen.de/moodle/course/view.php?id=29285>

Prof. Dr.-Ing. Walter Lindermeir

<https://www.hs-esslingen.de/personen/walter-lindermeir/>

Prof. Dr.-Ing. Werner Zimmermann

<https://www.hs-esslingen.de/personen/werner-zimmermann/>

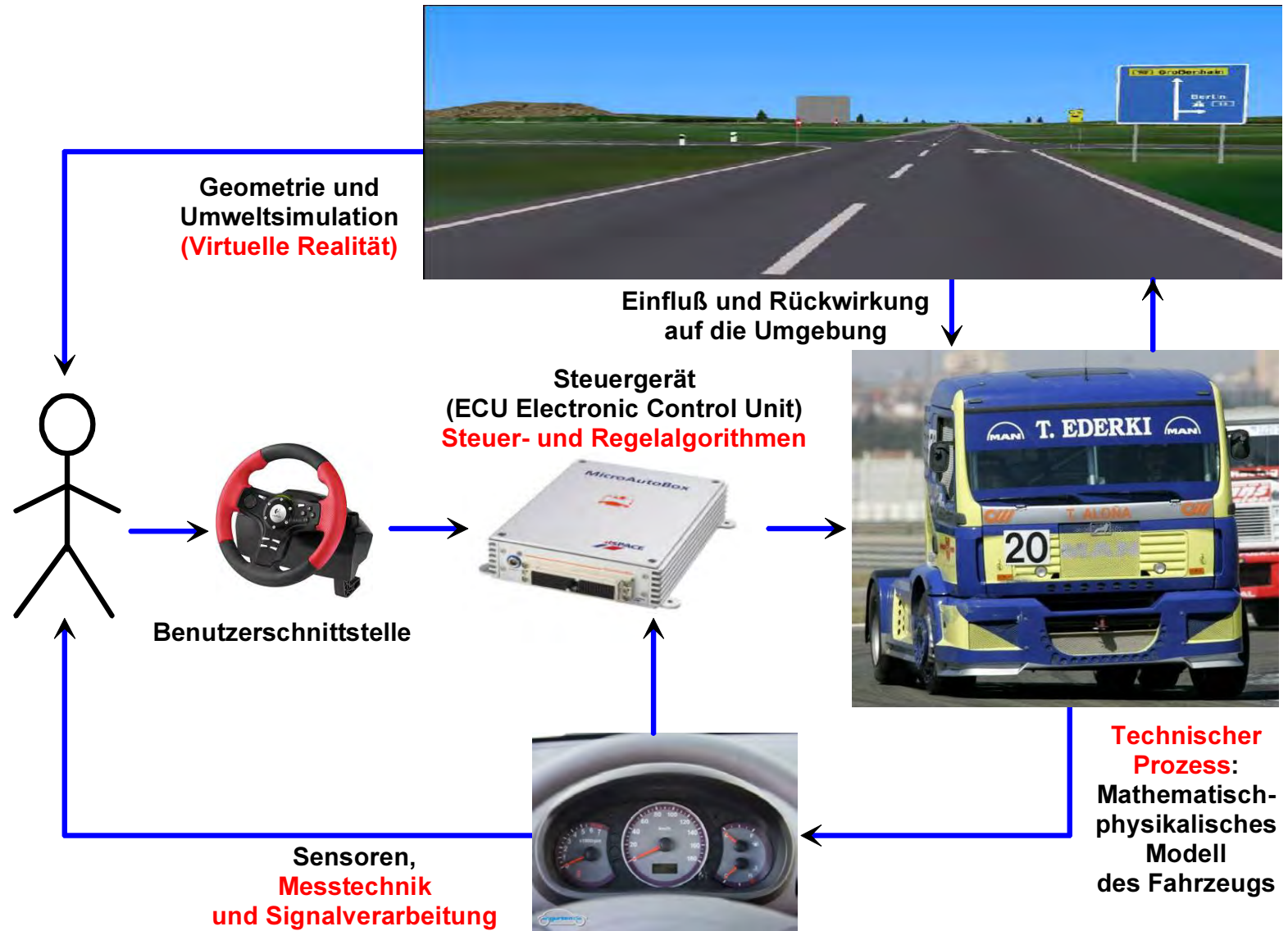
Hochschule Esslingen - Fakultät Informationstechnik

Moderne Systementwicklung

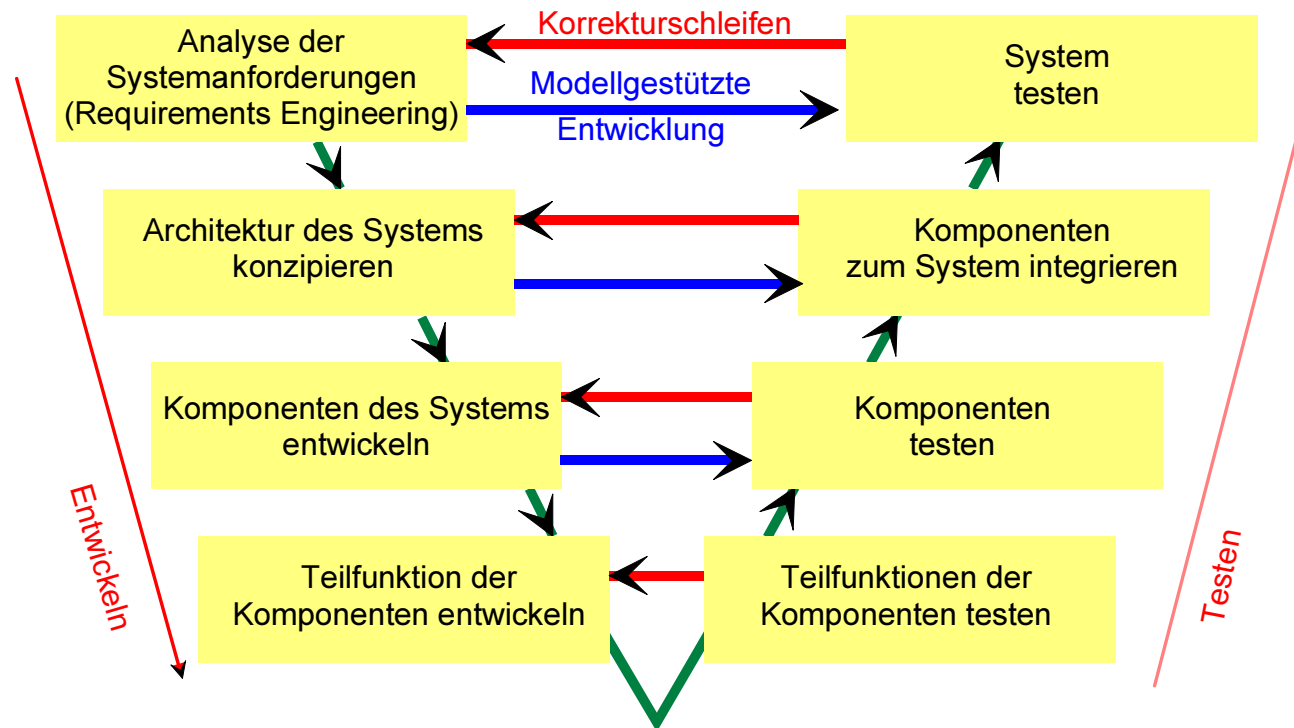
Messen, Steuern und Regeln sind heute **Bestandteil** der meisten **technischen Systeme**, aber auch vieler biologischer oder sogar wirtschaftlicher Systeme

Modellierung und Simulation sind praktisch immer **Teil der Entwicklungsmethodik**.

Beispiel:
Fahrsimulation als **Computerspiel** oder industrielles **Entwicklungswerkzeug**



Modellgestützte Entwicklung und V-Entwicklungsmodell



- Bei der **klassischen Systementwicklung** muss der gesamte Entwicklungsprozess durchlaufen werden, bevor ein Prototyp des Systems getestet werden kann. Stellt man beim Systemtest Fehler fest, muss der gesamte Zyklus erneut durchlaufen werden.
- Bei der **Modellgestützten Entwicklung** wird das System bereits bei der Analyse der Anforderungen modelliert und das Modell schrittweise verfeinert. Das Modell kann auf jeder Stufe durch Simulation getestet werden, bevor ein realer Prototyp gebaut wird. Mit fortgeschrittenen Werkzeugen kann die (Software)-Implementierung aus dem Modell sogar (teilweise) automatisch erzeugt werden (Modell-Compiler, Automatische Codegenerierung, Rapid Prototyping).

Modellierung und Simulation erlauben die Untersuchung des statischen und dynamischen Verhaltens:

Das **statische Verhalten**, z.B. die mechanische und thermische Belastung, Kraft- und Druckverteilung, Wärmeströmung usw. interessiert vor allem bei der Konstruktion mechanischer, hydraulisch-pneumatischer und elektromechanischer Komponenten. Die **Modellierung** erfolgt dabei häufig mit partiellen Differentialgleichungen und **Finite-Elemente-Methoden**, die Simulation z.B. mit *Ansys*, *Femlab*.

Die technischen Systeme bzw. das darin enthaltene **dynamische Verhalten** lässt sich im Wesentlichen in drei Gruppen einteilen:

- **Ablaufsteuerungen und Protokolle**

Modellierung durch **Zustandsautomaten** mit Aktionen und Aktivitäten (vergleiche Vorlesung Computerarchitektur 2), Sequenzdiagramme mit Interaktionen, Daten-, Klassen- und Komponentenmodellen

→ **Modellierungssprache z.B. Unified Modeling Language UML** aus der Softwarewelt (siehe Vorlesung Objektorientierte Systeme), Modellierung und Simulation z.B. mit *Rhapsody*, *Together*, *Rational Modeler*, für Zustandsautomaten auch *Stateflow* oder *Statemate*

- **Ereignisdiskrete Systeme**

Statt kontinuierlicher Zeitsignale verarbeitet das System **diskrete Ereignisse**, z.B. Materialfluß, Verkehrssysteme, Datenpakete, Telefonanrufe, Kundenanfragen, Geschäftsprozesse usw., **die statistisch verteilt auftreten.**

→ **Modellierung durch Warteschlangensysteme**, Simulation z.B. mit *GPSS*

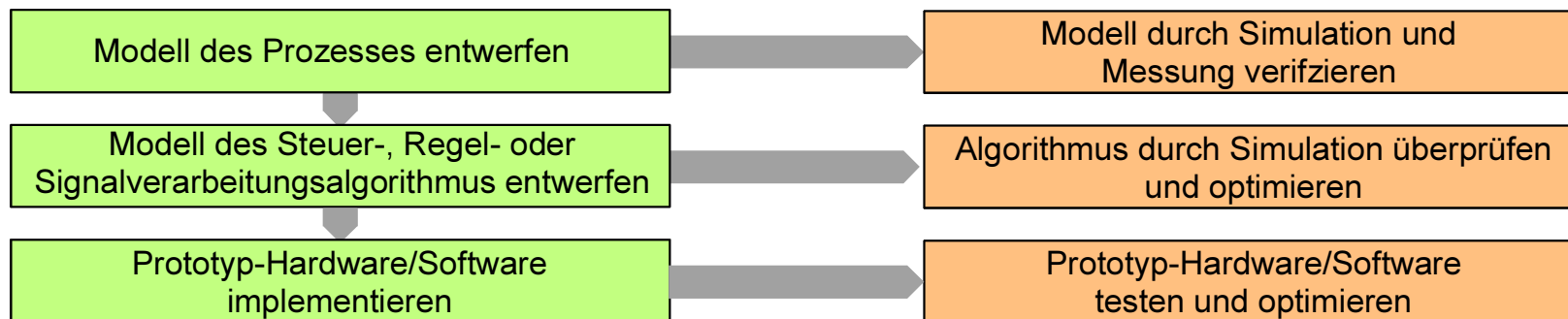
• Kontinuierliche Systeme

Schwerpunkt der Vorlesung Regelungstechnik 1

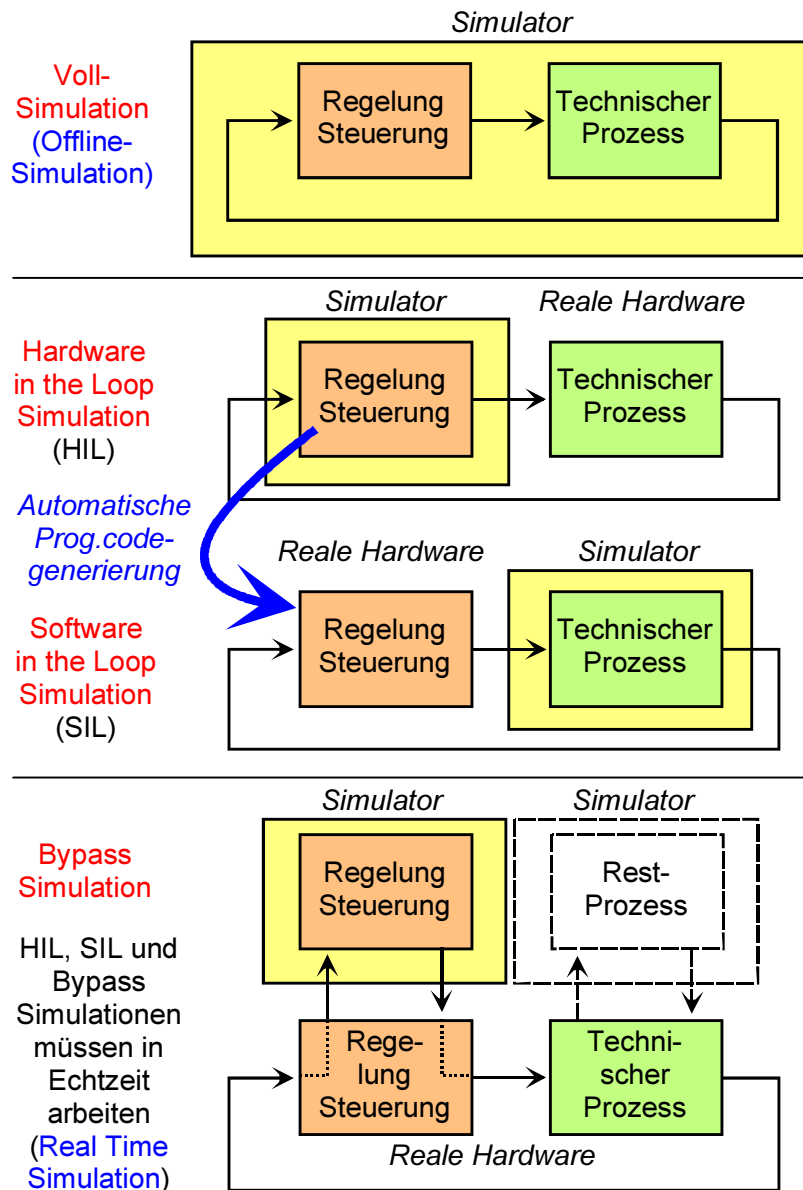
Diese Systeme verarbeiten kontinuierliche Eingangssignale, z.B. Messwerte in einem Regelsystem und liefern ihre Ausgangssignale an andere Systeme, z.B. die Stellglieder des Technischen Prozesses. Kennzeichen dieser Systeme ist die **kontinuierliche Verarbeitung von Zeitsignalen**, auch wenn die technische **Implementierung** der Signalverarbeitungs- und Regelalgorithmen **häufig digital**, d.h. zeit- und wertdiskret erfolgt.

→ **Signalflußorientierte Modellierung mit Hilfe von mathematisch-physikalischen Gleichungen** (gewöhnliche Differentialgleichungssysteme, Übertragungsfunktionen, Blockschaltbilder), Simulation z.B. mit *Matlab/Simulink*, *Dymola*, *Ascet*, *ACSL*, ...

Die Modellierung auf Basis von Gleichungen ist zwar sehr universell, aber auch mühsam. Für bestimmte Anwendungsgebiete gibt es daher Werkzeuge, die eine **topologie- bzw. komponentenorientierte Modellierung** erlauben, d.h. das Modell wird aus Bauteilen und deren Parametern zusammengesetzt, z.B. *Spice* für die Schaltungssimulation oder *Adams* für die Simulation mechanischer Mehrkörper-Probleme. Die Simulation erfolgt auch dabei mittels mathematisch-physikalischer Gleichungen, lediglich die Umsetzung zwischen Bauteilen und beschreibenden Gleichungen erfolgt durch das Werkzeug automatisch.



Simulation im Entwicklungsprozess



- **Zu Beginn eines Entwicklungsprozesses** existieren häufig weder das Steuergerät noch der technische Prozess. In diesem Stadium werden Regelung/Steuerung und technischer Prozess modelliert und das **gesamte System simuliert**.
- Die entwickelten **Steuer- und Regelalgorithmen** können **am realen technischen Prozess getestet** werden, bevor das reale Steuergerät fertig ist (**Rapid Prototyping**).
- **Aus dem Modell** der Regelung/Steuerung **wird manuell** oder **automatisch Code** für das reale Steuergerät **generiert**.
- Der **Test des realen Steuergerätes** erfolgt aus Sicherheitsgründen zunächst **mit Hilfe des simulierten Technischen Prozesses** („Laborauto“, Prozesssimulator).
- Statt das gesamte Steuergerät und/oder den gesamten Technischen Prozess zu simulieren, kann der **Simulator** auch **als Bypass** zum realen System eingesetzt werden, **um lediglich die noch nicht real vorhandenen Komponenten oder Funktionen zu simulieren**.

Literaturhinweise

Literaturhinweise

Die folgende Liste stellt nur eine kleine Auswahl aus einer unübersehbar großen Menge von Büchern zum Thema dar:

Einführende Bücher

Grundlagenstoff

- [1.1] Reuter, M., Zacher, S.: Regelungstechnik für Ingenieure. Springer Vieweg Verlag
- [1.2] Mann, H., Schiffelgen, H., Froriep, R.: Einführung in die Regelungstechnik. Hanser Verlag
- [1.3] Gipser, M.: Systemdynamik und Simulation, Teubner Verlag
- [1.4] Lunze, J.: Regelungstechnik, 2 Bände, Springer Verlag

Theoretische Grundlagen

Mathematisch teilweise anspruchsvoll, als Einführung weniger geeignet

- [2.1] Unbehauen, H.: Regelungstechnik. 3 Bände, Vieweg Teubner Verlag
- [2.2] Föllinger, O.: Regelungstechnik. VDE Verlag
- [2.3] Isermann, R.: Digitale Regelsysteme. Springer Verlag

Praxisbücher

Anwendungsorientierte Beschreibungen, wie Regelsysteme mit Matlab/Simulink entworfen und in eingebetteten Systemen implementiert werden. Theorieteile pragmatisch kurz gehalten.

- [3.1] Wescott, T.: Applied Control Theory for Embedded Systems. Elsevier Newnes Verlag
- [3.2] Ledin, J.: Embedded Control Systems in C/C++. CMP Verlag
- [3.3] Ledin, J.: Simulation Engineering. CMP Verlag

Literaturhinweise

Formelsammlungen

Nicht als Lehrbücher geeignet, aber gut zum Nachschlagen

- [4.1] Lutz, H.; Wendt, W.: Taschenbuch der Regelungstechnik. Verlag Europa Lehrmittel
[4.2] Große, N.; Schorn, W.: Taschenbuch der praktischen Regelungstechnik. Hanser Verlag

Normen

- [5.1] DIN 1304-10 Formelzeichen für die Regelungs- und Steuerungstechnik
DIN 19226, 19227 Leittechnik: Regelungs- und Steuerungstechnik, Prozeßleittechnik
DIN 19233 Leittechnik: Prozeßautomatisierung

Matlab/Simulink

- [6.1] Bode, H.: Systeme der Regelungstechnik mit Matlab-Simulink. Oldenbourg Verlag
[6.2] Hoffmann, J., Quint, F.: Simulation technischer linearer und nicht-linearer Systeme mit Matlab/Simulink. Oldenbourg Verlag
[6.3] Mathworks Matlab und Simulink Studentenversionen, Tutorials usw.:
de.mathworks.com/academia
www.academic-center.de Menüpunkt Studierende – Matlab

Studierende der Hochschule Esslingen dürfen unter Beachtung der Lizenzbedingungen für Ausbildungszwecke Matlab kostenfrei auf dem eigenen Rechner installieren und nutzen:

<http://www.hs-esslingen.de/de/hochschule/service/rechenzentrum/software-und-hardwareangebot.html>

Für Regelungstechnik benötigen Sie Matlab, Simulink, Stateflow und die Control System Toolbox.

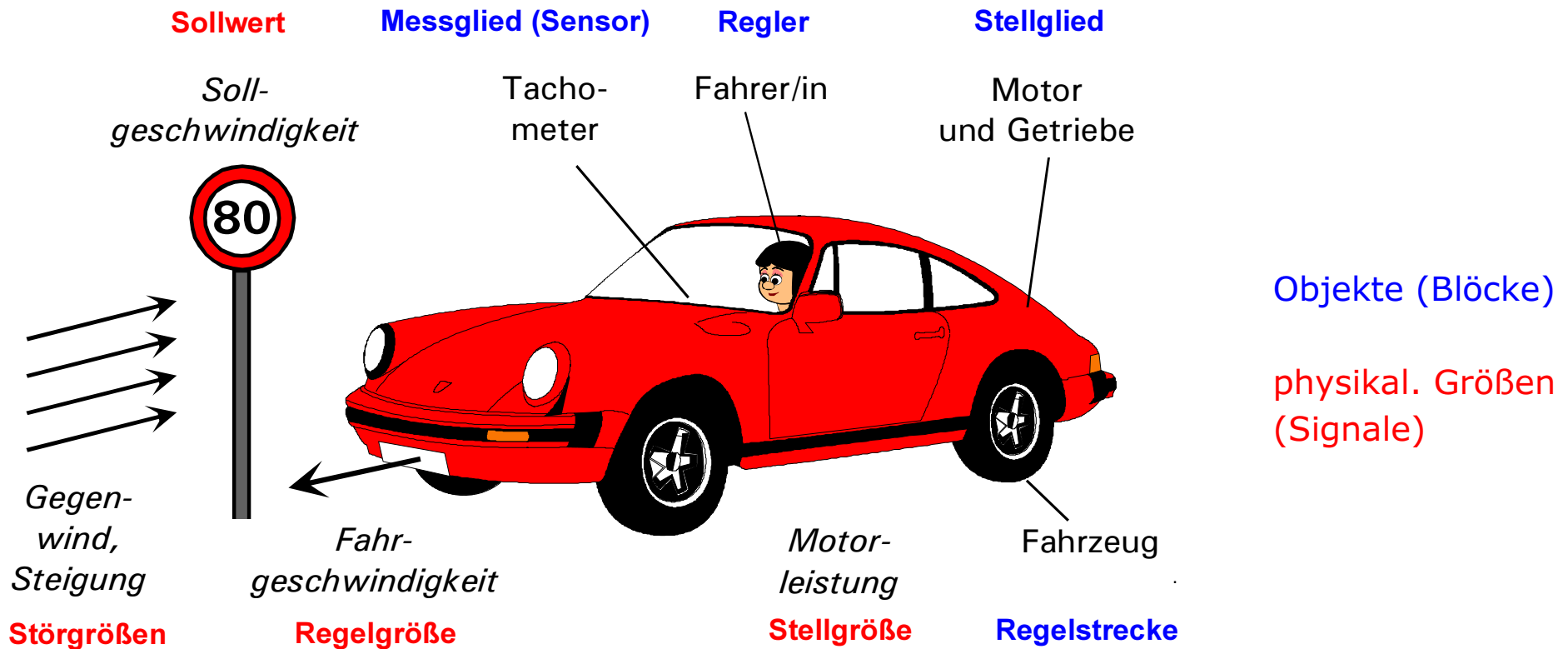
Kapitel 2

Einführendes Beispiel: Fahrgeschwindigkeitsregelung eines Autos

2.1 Technischer Prozess und mathematisch-physikalisches Modell.....	2
2.2 Simulation mit den Daten eines realen Fahrzeugs	6
2.3 Eigenschaften und Anforderungen an ein Regelsystem.....	12
Anhang Simulink-Blockschaltbild der Fahrgeschwindigkeitsregelung	15
Anhang Physikalische Modellierung dynamischer Systeme	16

2.1 Fahrgeschwindigkeitregelung eines Autos - Modellierung

Technischer Prozess und mathematisch-physikalisches Modell



Aufgabenstellung für den Fahrer:

Fahrgeschwindigkeit (**Regelgröße**) soll durch Motorleistung (**Stellgröße**) so eingestellt werden, dass sie einen gewünschten konstanten oder veränderlichen Wert (**Sollwert**) annimmt. Der Einfluss des Gegenwinds und von Steigungen (**Störgrößen**) soll eliminiert (ausgeregelt) werden. → **Regelsystem (Feedback Control)**

2.1 Fahrgeschwindigkeitregelung eines Autos - Modellierung

Mathematisch-physikalisches Modell

Regelstrecke (einschließlich Stellglied)

- **Kräftegleichgewicht** am Fahrzeug (Newtonsches Axiom: Kraft = Masse x Beschl.)

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad v(t) = \int_0^t \frac{F(\tau)}{m} d\tau + v(t=0) \quad (1)$$

Beschleunigende Kraft F Fahrzeugmasse m Fahrgeschwindigkeit v

$$F = F_A - F_W - F_G \quad (2)$$

Antriebskraft des Motors F_A Luftwiderstand F_W Hangabtrieb F_G

- **Hangabtrieb** (Störgröße)

$$F_G = m g \cdot \sin \varphi$$

φ Steigungswinkel der Straße mit $\varphi > 0$ bei Bergauffahrt
im Folgenden Annahme $\varphi = \text{const.} = 0$, d.h. Ebene

- **Luftwiderstand**

$$F_W = c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \quad (3)$$

Luftwiderstandsbeiwert c_w Luftdichte ρ Querschnittsfläche des Fahrzeugs A

2.1 Fahrgeschwindigkeitregelung eines Autos - Modellierung

• Stellglied Motor - Getriebe – Differential – Räder

Motordrehmoment $M_M = k_2 \cdot \alpha$ (4)

(ohne Schleppmoment im Schub) Proportionalitätsfaktor k_2 Gaspedalstellung α

Antriebskraft $F_A = k_1 \cdot M_M$ (5)

Proportionalitätsfaktor k_1 (enthält Getriebe-Übersetzung)

• **Motordrehzahl** $P_M = F_A \cdot v = M_M \cdot 2\pi n \xrightarrow{\text{Gl.(5)}} n = k_1 \frac{v}{2\pi}$ (6)

• **Schaltstrategie des Getriebes** $k_1 = k_1(\text{Gang}) = k_1(n) \stackrel{\text{Gl.(6)}}{=} k_1(v)$ (7)

(stark vereinfacht) Wenn $n < n_{\min}$: Herunterschalten \rightarrow Gang = Gang - 1

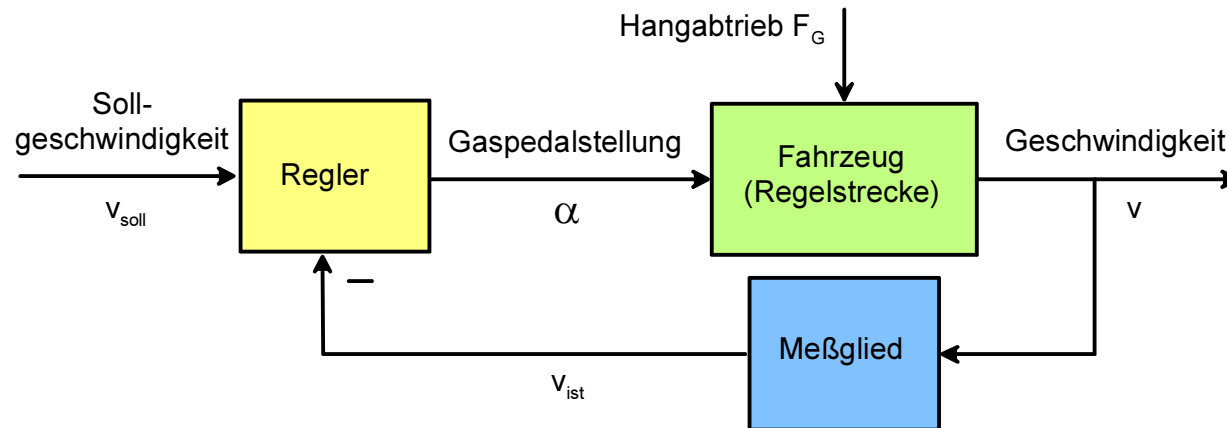
Wenn $n > n_{\max}$: Hochschalten \rightarrow Gang = Gang + 1

5 Gang Getriebe: \rightarrow $1 \leq \text{Gang} \leq 5$

$n_{\min}, n_{\max} \dots$ Schaltschwellen

2.1 Fahrgeschwindigkeitregelung eines Autos - Modellierung

Regelkreis



- **Messglied** (ideales Messglied) $v_{\text{ist}} = v$ (8)

- **Regler** (Versuch einer Beschreibung) $\alpha = k_p \cdot e = k_p \cdot (v_{\text{soll}} - v_{\text{ist}})$ (9)

Reglerverstärkung k_p Regeldifferenz $e = v_{\text{soll}} - v_{\text{ist}}$

Durch Einsetzen von Gleichung (2) – (9) in Gleichung (1) könnte $v(t)$ bei gegebenem Anfangswert $v(t=0)$ und Hangabtrieb F_G sowie vorgegebenem Verlauf von $v_{\text{soll}}(t)$ berechnet werden, falls es gelingt, die nichtlineare Differentialgleichung zu lösen:

$$m \cdot \frac{dv(t)}{dt} = k_1(v) \cdot k_2 \cdot k_p \cdot [v_{\text{soll}}(t) - v(t)] - c_W \rho A \cdot v^2(t) - F_G \quad (10)$$

2.2 Fahrgeschwindigkeitregelung eines Autos – Simulation und Reglerentwurf

Simulation mit den Daten eines realen Fahrzeugs

- Fahrzeugmasse: $m = 1600 \text{ kg}$
- Max. Motorleistung: $P_{M,\max} = 140 \text{ PS} = 104 \text{ kW}$ bei $n_{\max} = 4200 \text{ min}^{-1} = 70 \text{ sec}^{-1}$

$$\text{Mit } P = F_A \cdot v = M \cdot 2\pi n \rightarrow P_{M,\max} = M_{M,\max} \cdot 2\pi n_{\max} \rightarrow M_{M,\max} = \frac{P_{M,\max}}{2\pi n_{\max}} = 236 \text{ Nm}$$

- Abschätzung des Luftwiderstands: Bei Höchstgeschwindigkeit $v_{\max} = 200 \text{ km/h}$ im 5. Gang wird die gesamte Motorleistung P_{\max} benötigt, um den Luftwiderstand zu überwinden (Reibungsverluste im Antriebsstrang vernachlässigt), d.h.

$$P_{M,\max} = F_W(v_{\max}) \cdot v_{\max} \stackrel{\text{Gl.(3)}}{=} c_W \cdot \rho \cdot A \cdot v_{\max}^3 \rightarrow c_W \cdot \rho \cdot A = \frac{P_{M,\max}}{v_{\max}^3} = 0,625 \frac{\text{W}}{(\text{m/s})^3}$$

- Gaspedalstellung und Motordrehmoment

$$\text{Annahme: Bei } \alpha = \alpha_{\max} = 30^\circ \text{ wird } M = M_{M,\max} \rightarrow k_2 \stackrel{\text{Gl.(4)}}{=} \frac{M_{M,\max}}{\alpha_{\max}} = \frac{236 \text{ Nm}}{30^\circ} = 7,9 \frac{\text{Nm}}{^\circ}$$

- Drehzahlgrenze für Schaltvorgänge $n_{\min} = 1500 \text{ min}^{-1}$ $n_{\max} = 4200 \text{ min}^{-1}$

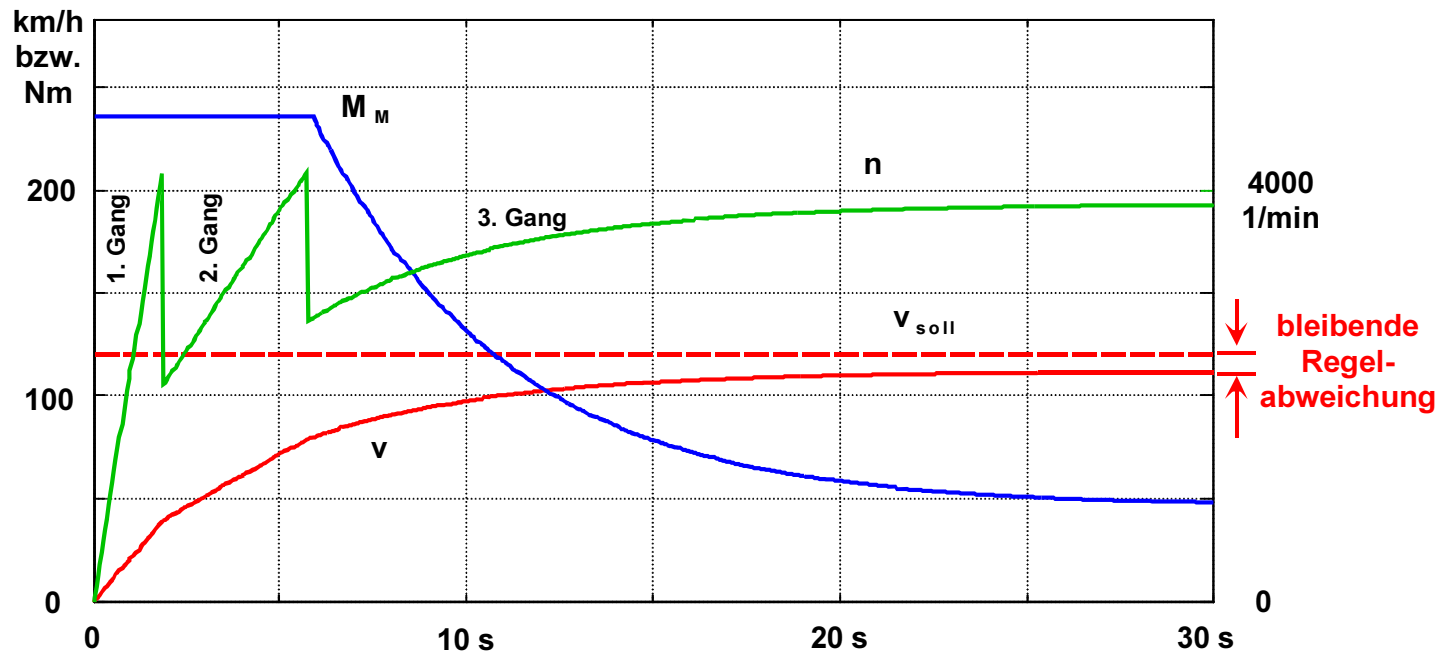
- Höchstgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Gangstufe $k_1 \stackrel{\text{Gl.(6)}}{=} 2\pi n_{\max} / v_{\max} \text{ [in 1/m]}$

v_{\max}	Gang	k_1	v_{\max}	Gang	k_1	v_{\max}	Gang	k_1
200 km/h = 55 m/sec	5	8	120 km/h = 33 m/sec	3	13	40 km/h = 11 m/sec	1	40
160 km/h = 44 m/sec	4	10	80 km/h = 22 m/sec	2	20			

2.2 Fahrgeschwindigkeitregelung eines Autos – Simulation und Reglerentwurf

Simulationsergebnis für Beschleunigung auf $v_{\text{soll}} = 120 \text{ km/h}$ mit $v(t=0) = 0 \text{ km/h}$, $F_G = 0$

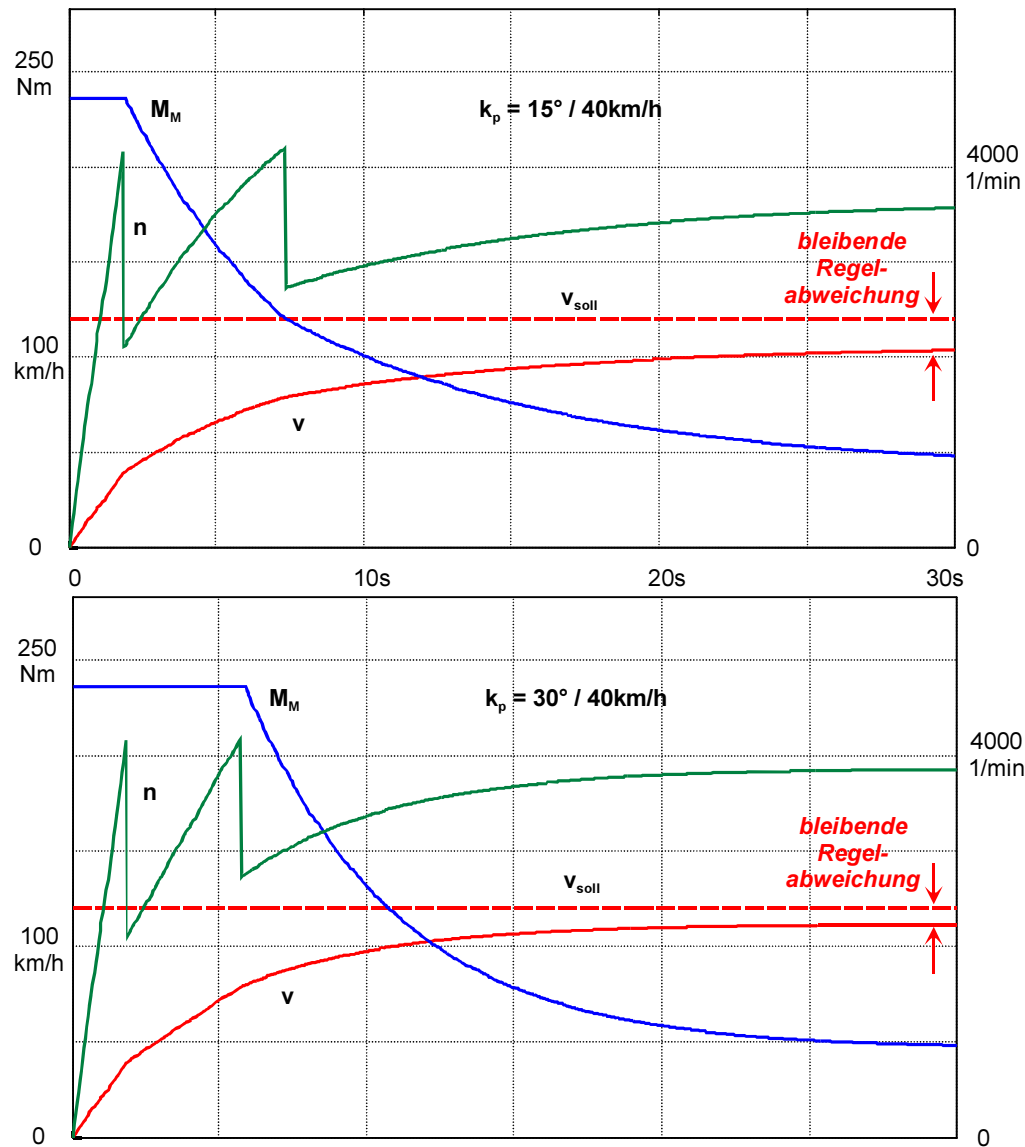
- Willkürliche Festlegung der Reglerverstärkung: $k_p = \frac{30^\circ}{40 \text{ km/h}}$, d.h. Vollgas bei $v_{\text{soll}} - v \geq 40 \text{ km/h}$



Beurteilung des Verhaltens:

<i>Dynamisch:</i>	Regelkreis ist stabil, schwingt nicht	Gut!
	Schnelles Einschwingen ohne (wesentliches) Überschwingen	Gut!
<i>Stationär:</i>	Endwert bleibt unter Sollwert → bleibende Regelabweichung	Schlecht!

2.2 Fahrgeschwindigkeitsregelung eines Autos – Simulation und Reglerentwurf



Vorteil der Simulation:

Änderungen der Reglerparameter

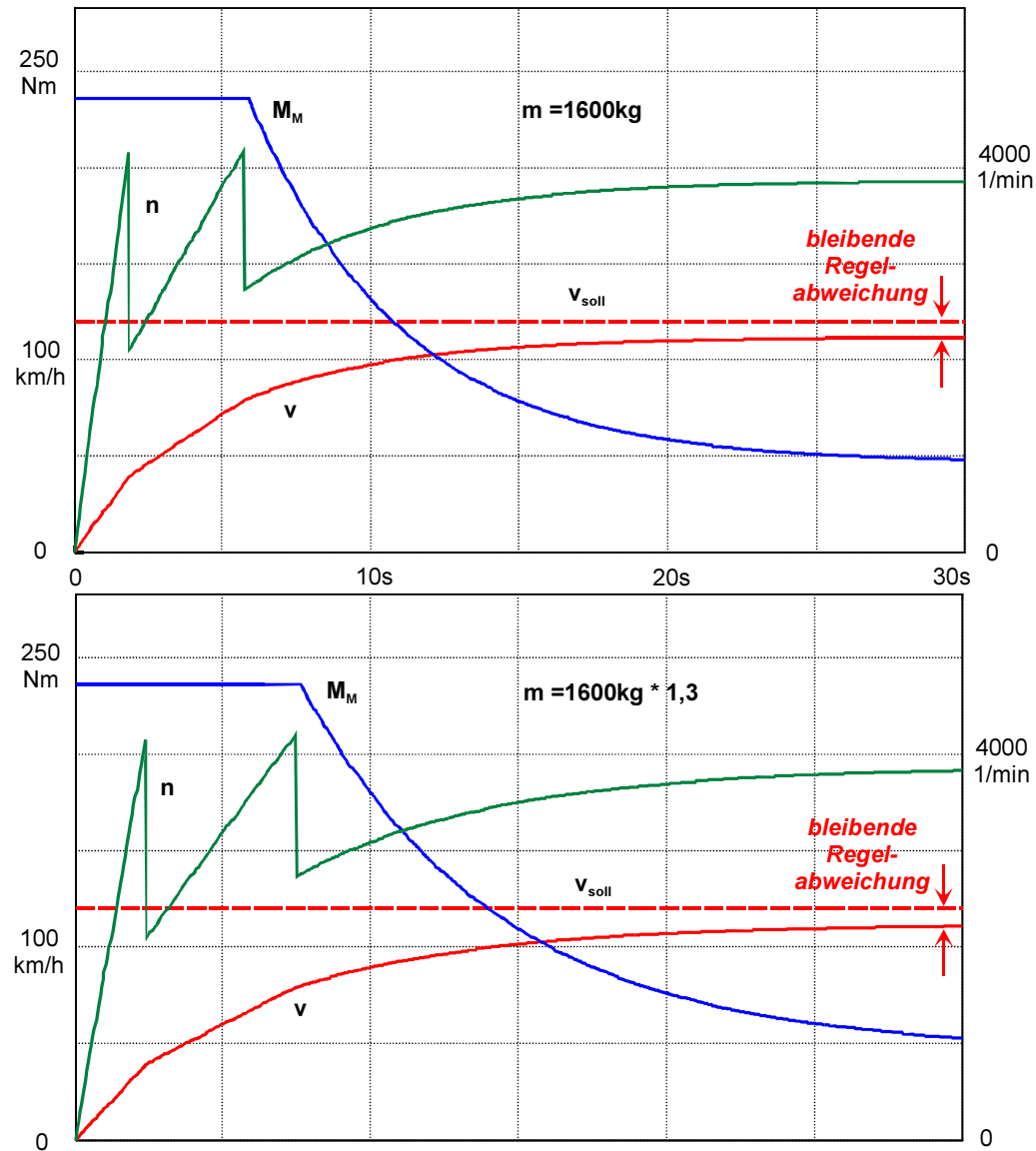
lassen sich einfach untersuchen,

z.B. Reglerverstärkung $k_p \downarrow$

→ bleibende Regelabweichung \uparrow

→ Einschwingdauer \uparrow

2.2 Fahrgeschwindigkeitregelung eines Autos – Simulation und Reglerentwurf



Vorteil der Simulation:

Änderungen der Streckenparameter

lassen sich einfach untersuchen,

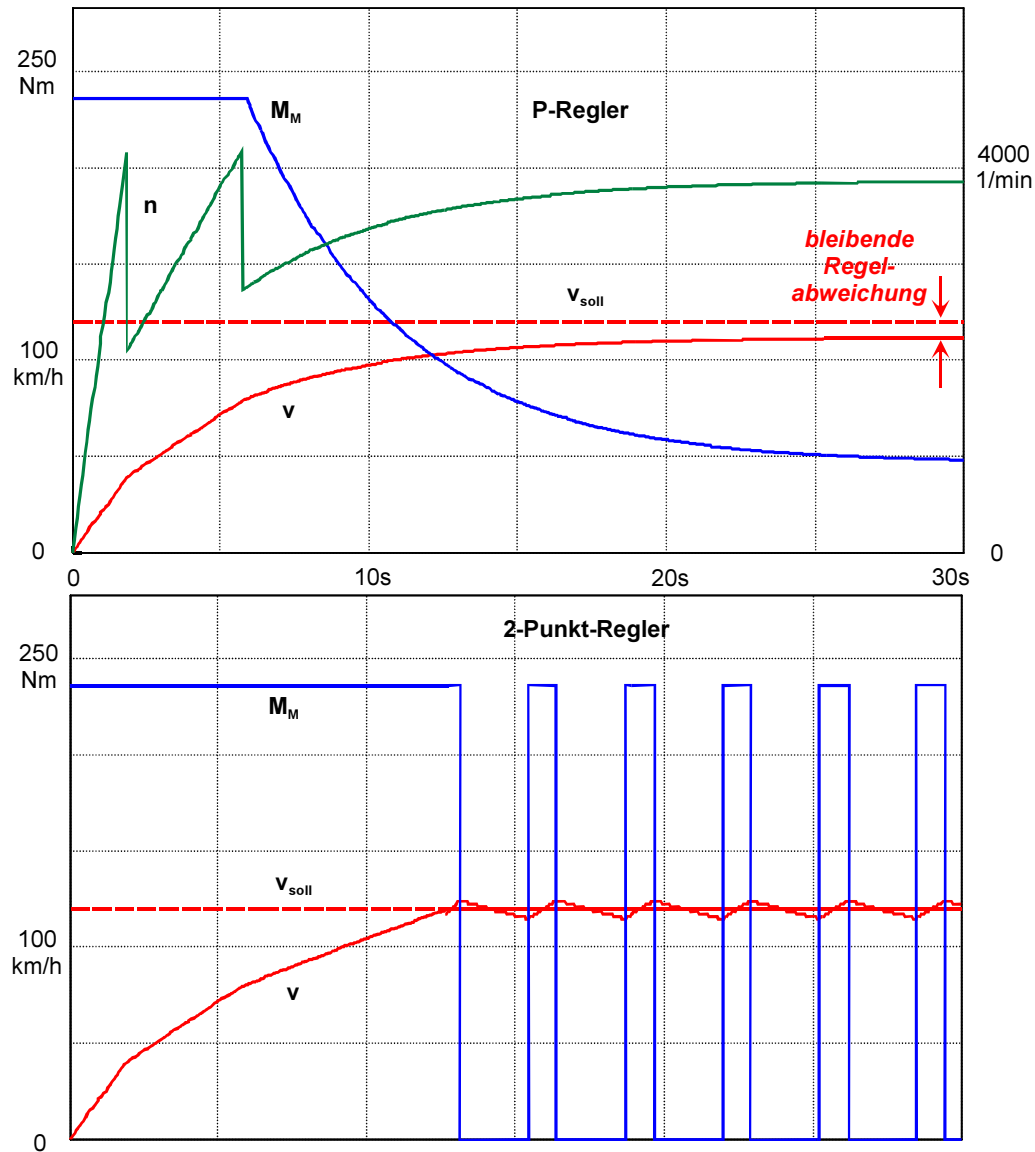
z.B. Fahrzeugmasse $m \uparrow$

→ bleibende Regelabweichung unverändert

→ Einschwingdauer \uparrow

→ Einschwingverhalten qualitativ unverändert

2.2 Fahrgeschwindigkeitregelung eines Autos – Simulation und Reglerentwurf



Vorteil der Simulation:

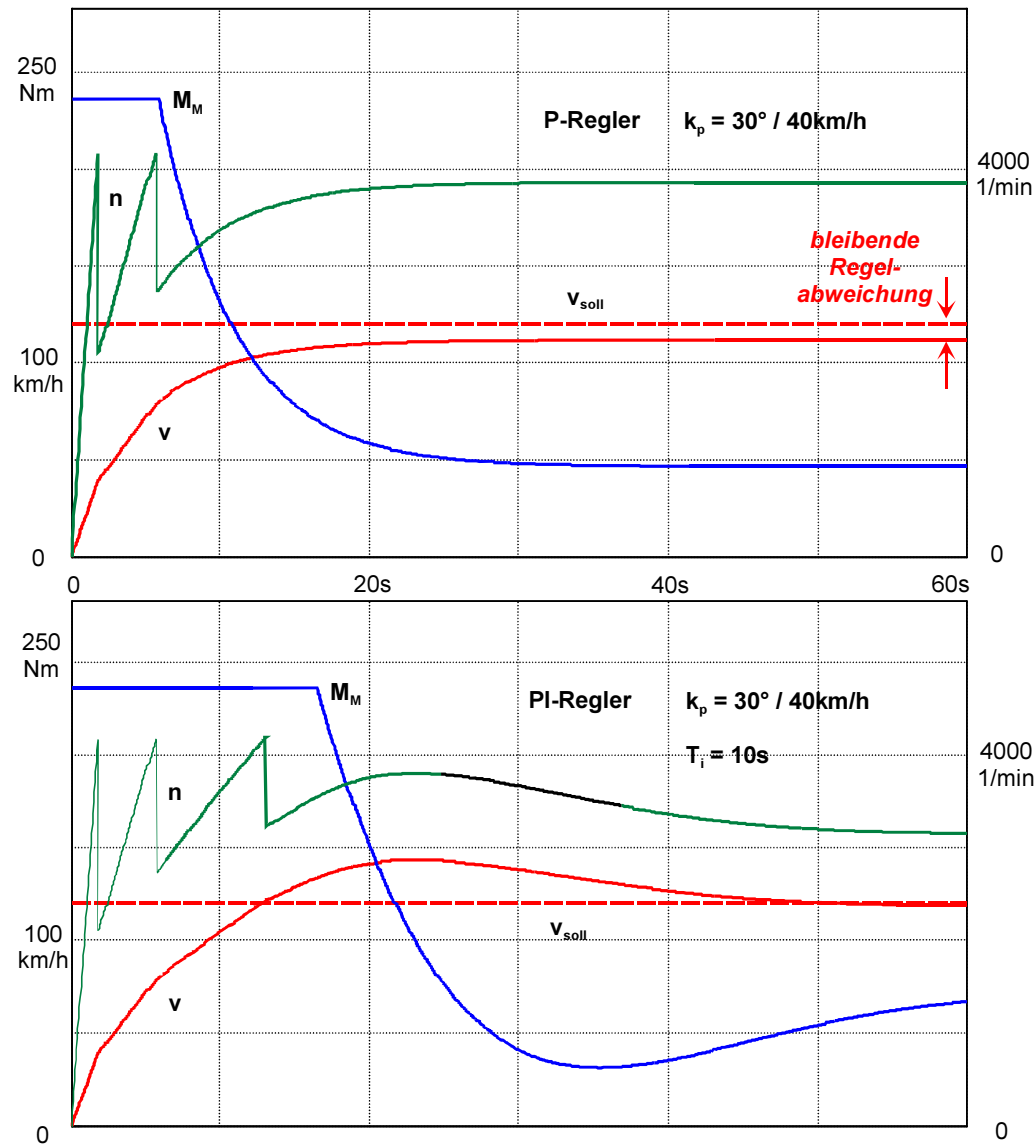
Änderungen der Reglerstruktur lassen sich einfach untersuchen,

z.B. 2-Punkt-Regler $v < v_{soll}$: Vollgas
 $v > v_{soll}$: Leerlauf

(wirkt wie sehr große Reglerverstärkung k_p)

- kürzestmögliche Einschwingdauer
- System kommt nicht zur Ruhe, Stellgröße schwankt ständig

2.2 Fahrgeschwindigkeitregelung eines Autos – Simulation und Reglerentwurf



Vorteil der Simulation:

Änderungen der Reglerstruktur lassen sich einfach untersuchen,

z.B. PI-Regler statt P-Regler

z.B. PI-Regler statt P-Regler

$$\alpha = k_p \cdot (v_{soll} - v_{ist})$$

$$+ k_p \cdot \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t \{ v_{soll}(\tau) - v_{ist}(\tau) \} d\tau$$

(wirkt bei sehr niedrigen Frequenzen $s=0$, d.h. im eingeschwungenen Zustand, wie eine sehr große Reglerverstärkung)

→ bleibende Regelabweichung wird 0

→ deutliches Überschwingen

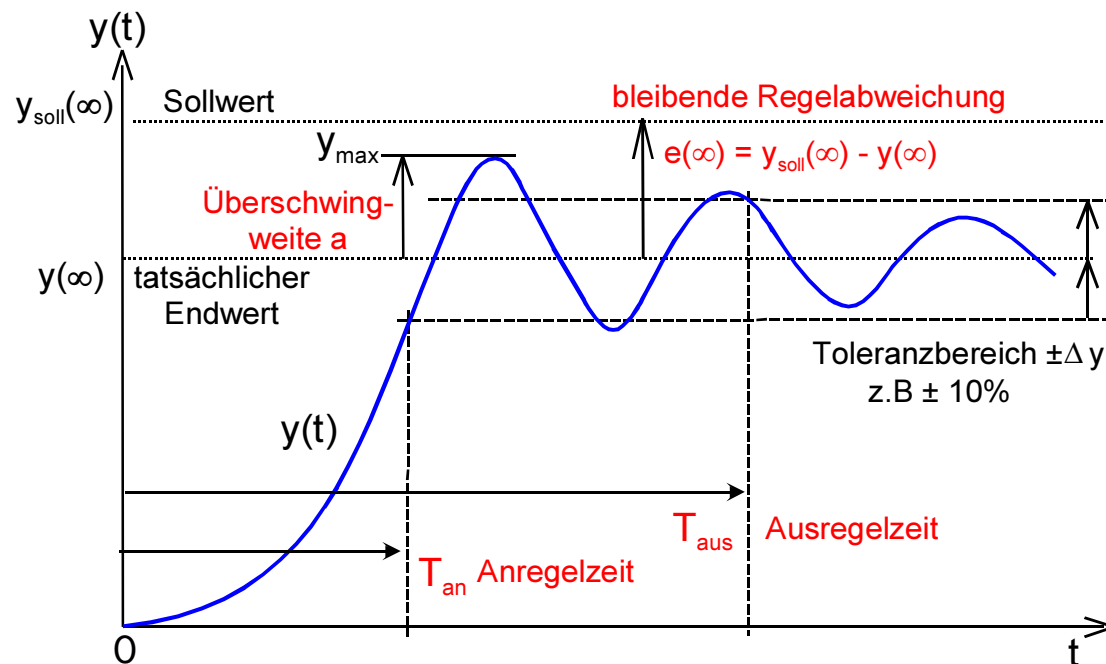
→ deutlich längere Einschwingdauer

2.3 Eigenschaften und Forderungen an Regelsysteme

Wichtige Eigenschaften eines Regelsystems

Definitionen

- Stationäres Verhalten: Verhalten im eingeschwungenen Zustand → Genauigkeit
 - dabei in der Regel: Eingangsgrößen zeitlich konstant
 - in Ausnahmefällen: Eingangsgrößen periodische Signale konstanter Amplitude und Frequenz
- Dynamisches Verhalten:
 - Stabilität
 - Dämpfung und Geschwindigkeit des Einschwingvorgang



Beurteilung des Verhaltens mit der Sprungantwort eines Regelkreises:

Bleibende Regelabweichung

$$e(t \rightarrow \infty) = e(\infty) = y_{\text{soll}}(\infty) - y(\infty)$$

Überschwingweite

$$a = \frac{y_{\text{max}} - y(\infty)}{y(\infty)}$$

Anregelzeit T_{an} = Zeit vom Sprung bis zum ersten Eintritt in den Toleranzbereich $y(\infty) \pm \Delta y$

Ausregelzeit T_{aus} = Zeit vom Sprung bis zu dem Zeitpunkt, bei dem der Toleranzbereich endgültig erreicht ist und nicht mehr verlassen wird.

2.3 Eigenschaften und Forderungen an Regelsysteme

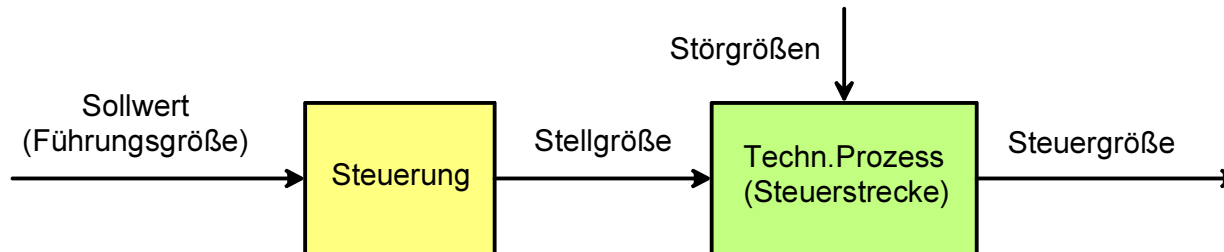
Anforderungen an eine Regelung

<ul style="list-style-type: none">• Stabilität:	Regelgröße darf nicht schwingen, über alle Grenzen ansteigen oder dauerhaft in die Begrenzung gehen und muss bei konstantem Sollwert (nach Ende des Einschwingvorgangs) konstant sein. Bei nichtlinearen Reglern eventuell auch stationäre Grenzzyklen.
<ul style="list-style-type: none">• Genauigkeit:	Bleibende Regelabweichung zwischen Sollwert und Regelgröße im eingeschwungenen Zustand soll klein sein, im Idealfall 0.
<ul style="list-style-type: none">• Einschwingen:<ul style="list-style-type: none">- Führungs- bzw. Folgeverhalten- Störverhalten	Einschwingvorgänge sollen schnell und gut gedämpft sein, d.h. in kurzer Zeit und mit geringem oder ohne Überschwingen. Die Regelgröße soll Änderungen des Sollwertes schnell und ohne große Abweichungen folgen („gutes Führungsverhalten“) Die Auswirkung von Störgrößen auf die Regelgröße soll kleinstmöglich sein („Störgrößen sollen ausgeregelt werden“)
<ul style="list-style-type: none">• Robustheit:	Stabilität muss immer noch vorhanden sein, auch wenn sich Parameter der Regelstrecke oder des Reglers wegen Exemplartoleranzen, Alterung oder abhängig vom Betriebspunkt (z.B. Temperatur) ändern. Das statische und dynamisch Verhalten soll sich nur geringfügig ändern.
<ul style="list-style-type: none">• Stellgliedbeanspruchung	Das Stellglied soll nur gering beansprucht werden, d.h. die maximale Stellgröße soll nicht wesentlich größer werden als die stationär notwendige Stellgröße. Das Stellsignal soll sich nicht allzu stark oder schnell ändern.

2.3 Eigenschaften und Forderungen an Regelsysteme

Unterschied zwischen Regelung und Steuerung

• Steuerung

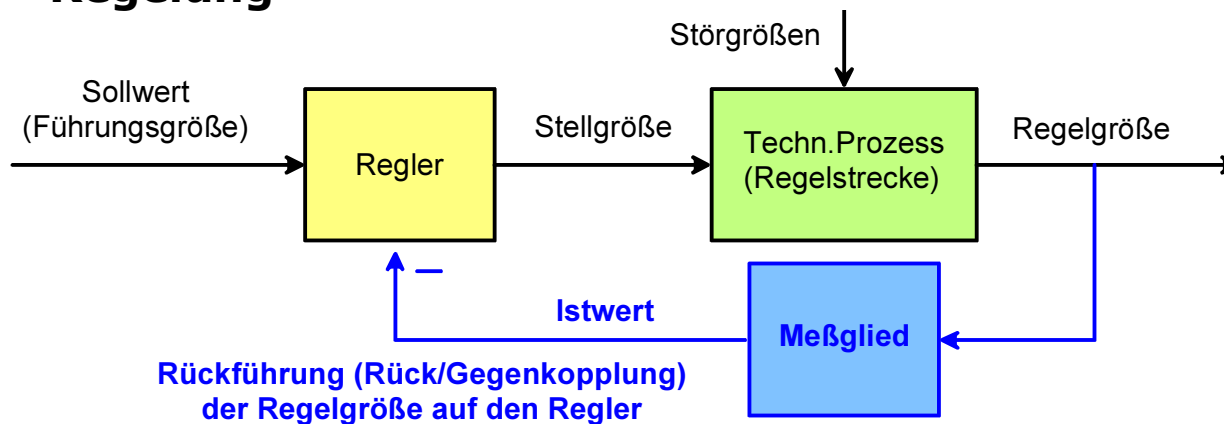


Steuerung ändert Stellgröße so, dass Steuergröße dem Sollwert theoretisch gut folgt.

Verhalten des Technischen Prozesses muss exakt bekannt sein.

Wirkung von Störgrößen wird nicht erfasst.

• Regelung



Regelung ändert Stellgröße so, dass Regelgröße dem Sollwert gut folgt.

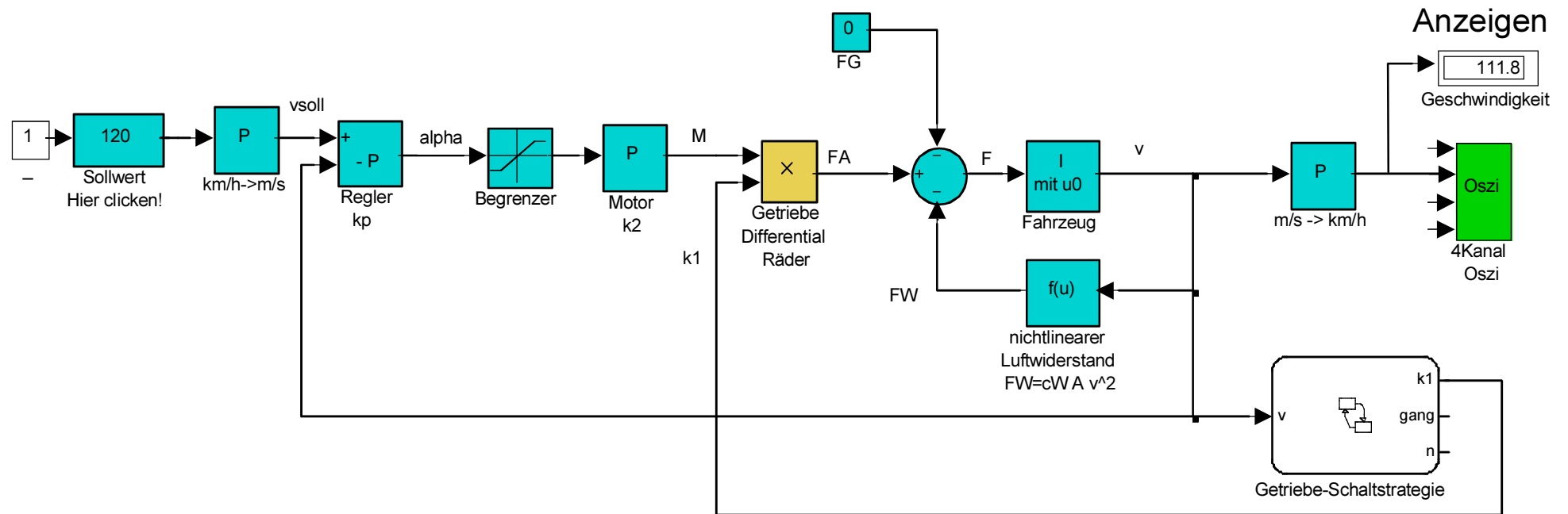
Verhalten des Technischen Prozesses muss nicht exakt bekannt sein.

Wirkung von Störgrößen wird (fast) ausgeregelt.

Wirkungskette der Regelung:

- Sollwert \uparrow \rightarrow Stellgröße \uparrow \rightarrow Regelgröße \uparrow
- Störgröße \uparrow (bei konst. Sollwert) \rightarrow Regelgröße \uparrow \rightarrow Stellgröße \downarrow \rightarrow Regelgröße \downarrow (Gegenkopplung)

Anhang: Simulink-Blockschaltbild der Fahrgeschwindigkeitsregelung



Sollwerterzeugung Regler

Stellglied und Regelstrecke

Getriebe-Logik

Datei FGRx.mdl, $x=1,2, \dots$

Die Getriebe-Schaltstrategie kann wahlweise als Matlab-Funktion oder als Stateflow-Zustandsdiagramm implementiert werden.

Beachten Sie bitte, dass das Motor-Schleppmoment im Schubbetrieb, d.h. beim Verzögern, nur dann korrekt modelliert wird, wenn $\alpha_{\min} < 0$ gewählt wird.

Anhang: Physikalische Modellierung dynamischer Systeme

Problem: Reale Systeme enthalten Komponenten aus der Elektrotechnik, aus der Mechanik, der Wärmelehre, ... → Domänen-übergreifende Beschreibung?

Ansatz: Betrachtung der Energie und der Energieflüsse in einem System:

- Welche Energie fließt in ein System hinein (=Eingangsgrößen)?
- Welche Energie fließt aus einem System heraus (=Ausgangsgrößen)?
- Welche Energie wird in einem System gespeichert (=Zustandsgrößen) bzw. in eine andere Energieform umgewandelt?

Drei Grund-Energieformen / Energiespeicher

	Statische Energie	Dynamische Energie	„Verlustenergie“
Mechanik	Potentielle Energie (Lageenergie) z.B. Höhe h Position/Weg x	Kinetische Energie (Bewegungsenergie) z.B. Geschwindigkeit v Drehzahl n	Wärmeenergie z.B. Verluste durch Reibung
Elektrotechnik	Elektrostat. Energie → Elektrostat. Feld z.B. Spannung eines Kondensators	Elektromagnet. Energie → Magnet. Feld z.B. Strom durch Spule	Wärmeenergie → Verluste in ohmschen Widerständen
...

Anhang: Physikalische Modellierung dynamischer Systeme

Das **Verhalten der Energiespeicher** kann (vereinfacht) durch **lineare Differentialgleichungen 1.Ordnung** beschrieben werden. Für die **Wechselwirkung der Energiespeicher** untereinander und mit den Ein- und Ausgängen sind zusätzlich **algebraische Gleichungen** nötig. Beispiele:

<i>Energieart</i>	<i>Speicherart und Zustandsgröße</i>	<i>Differentialgleichungen</i>
Elektrostatisch (potentielle Energie)	Kondensator → Kondensatorspannung u (bei nicht konstanter Kapazität: Elektrisches Feld E bzw. Ladung $Q=C \cdot u$)	$i = C \cdot \frac{du}{dt}$
Elektrodynamisch (kinetische Energie)	Spule → Spulenstrom i (bei nicht konstanter Induktivität: Magnetisches Feld B bzw. Fluß $\Phi=L \cdot i$)	$u = L \cdot \frac{di}{dt}$
Potentielle mechanische Energie	Lageenergie → Translation: Weg x Rotation: Drehwinkel α (Lage mechanischer Körper kann nicht springen)	$v = \frac{dx}{dt}$ $\Omega = \frac{d\alpha}{dt}$
Kinetische mechanische Energie	Trägheit → Translation: Geschwindigkeit v Rotation: Drehfrequenz Ω (Geschwindigkeit mechan. Körper kann nicht springen)	$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot \frac{dv}{dt}$ $M = J \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} = J \cdot \frac{d\Omega}{dt}$
Potentielle Energie Pneumatik, Hydraulik	Flüssigkeiten und Gase → Druck p	$q = C \cdot \frac{dp}{dt}$

Anhang: Physikalische Modellierung dynamischer Systeme

Kinetische Energie Pneumatik, Hydraulik	Strömende Flüssigkeiten oder Gase → Massenstrom q_m oder Volumenstrom q_v	$q_m = \frac{dm}{dt}$ $q_v = \frac{dV}{dt}$
--	---	--

<i>Systemtyp</i>	<i>Algebraische Gleichungen</i>	
Elektrotechnik	Ohmsches Gesetz Knotenregeln Maschenregeln Gesteuerte Quellen	$u = R \cdot i$ $\sum i = 0$ $\sum u = 0$ $y = k \cdot e$
Mechanik	Reibung → Translation Rotation Federn → Translation Rotation Kräftegleichgewicht Momentengleichgewicht	$F = d \cdot v$ $M = d \cdot \Omega$ $F = k \cdot x$ $M = k \cdot \alpha$ $\sum F = 0$ $\sum M = 0$
Pneumatik, Hydraulik	Regeln wie in der Elektrotechnik mit $p \rightarrow u$ und $q \rightarrow i$	

→ Systematische Modellierung siehe Regelungstechnik 2

Kapitel 3

Dynamisches Verhalten linearer Systeme

3.1	Blockschaltbilder und Übertragungsfunktionen	2
3.2	Linearer Standardregelkreis.....	11
3.3	Lineare Grundblöcke.....	12
3.4	Linearisierung und Normierung	17
3.5	Typen von Regelstrecken, SISO und MIMO	20
3.6	Regelkreise in nicht-technischen Systemen.....	22
	Anhang Beschreibung im Zeitbereich (Ausblick).....	24
	Anhang Formelzeichen und Bezeichnungen (→ separates Dokument)	

3.1 Blockschaltbilder und Übertragungsfunktionen

Beschreibung durch Blockschaltbilder und Übertragungsfunktionen

Wie das Beispiel Fahrgeschwindigkeitregelung gezeigt hat, lässt sich das dynamische Verhalten eines technischen Prozesses im Zeitbereich durch ein System von Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen beschreiben, z.B. Gleichungen (1) – (9) in Kapitel 2:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad (1) \quad v = \frac{dx}{dt} \quad (1a) \quad F = F_A - F_W - F_G \quad (2)$$

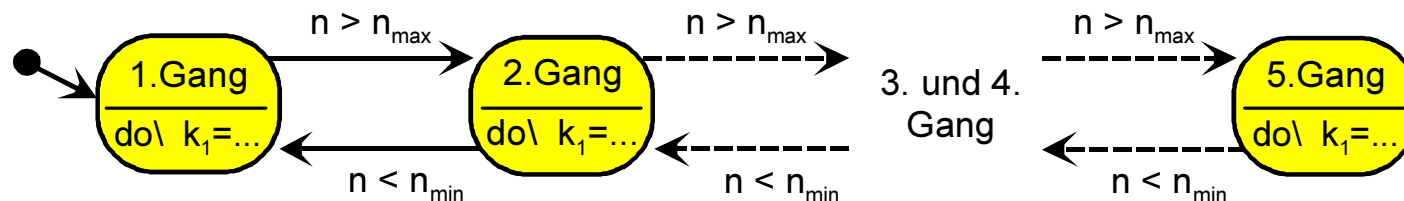
$$F_W = c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \quad (3) \quad M_M = k_2 \cdot \alpha \quad (4) \quad F_A = k_1(v) \cdot M_M \quad (5)$$

$$n = k_1(v) \frac{v}{2\pi} \quad (6) \quad v_{\text{ist}} = v \quad (8) \quad \alpha = k_p \cdot (v_{\text{soll}} - v_{\text{ist}}) \quad (9)$$

Zusätzlich $k_1 = k_1(\text{Gang}) = k_1(n) \stackrel{\text{Gl. (6)}}{=} k_1(v)$ Wenn $n < n_{\text{min}}$: Gang = Gang - 1 (7)

Wenn $n > n_{\text{max}}$: Gang = Gang + 1 mit $1 \leq \text{Gang} \leq 5$

Im Gegensatz zu den Gleichungen (1)-(5) und (8)-(9), die die Zusammenhänge zwischen physikalischen Zeitsignalen beschreiben, beschreibt (7) das ereignisdiskrete Verhalten einer Steuerung. Dazu verwendet man die aus *Digitaltechnik* bekannten Beschreibungsformen mit logischen Funktionen und Zustandsdiagrammen:



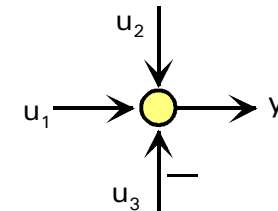
3.1 Blockschaltbilder und Übertragungsfunktionen

Da solche Gleichungssysteme recht unübersichtlich sind, verwendet man für die Beschreibung des dynamischen Verhaltens üblicherweise **Blockschaltbilder**.

Dabei gibt es eine Reihe **linearer Grundblöcke** sowie beliebige nichtlineare Blöcke:

Additionen oder Subtraktionen von Signalen

$$y(t) = u_1(t) + u_2(t) - u_3(t)$$

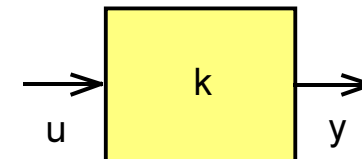


Summationsstelle

Lineare proportionale Zusammenhänge

$$y(t) = k \cdot u(t)$$

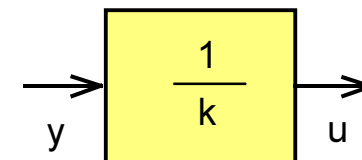
k ... Verstärkung
(konstant)



P (Proportional) – Glied

Vertauschen der
Ein- und Ausgänge möglich

$$u(t) = \frac{1}{k} \cdot y(t)$$



3.1 Blockschaltbilder und Übertragungsfunktionen

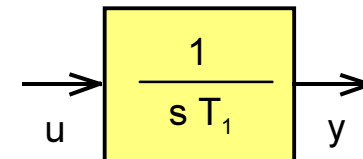
Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung $u(t) = T_1 \frac{dy(t)}{dt} \leftrightarrow U(s) = T_1 \cdot s Y(s)$

mit konstanten Koeffizienten werden mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Frequenzbereich transformiert.

Dabei wird angenommen, dass alle Anfangswerte 0 sind. s ist die Laplace-Variable (in der deutschsprachigen Literatur auch p). Zeitsignale werden üblicherweise mit Klein-, s -transformierte Signale mit Großbuchstaben geschrieben.

Ist $u(t)$ das Eingangssignal und $y(t)$ das Ausgangssignal, so ergibt sich daraus die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s T_1}$$

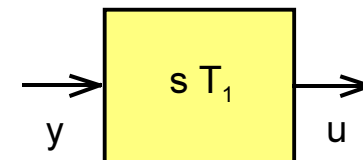


T_1 ... I-Zeitkonstante

I (Integral) - **Glied**

Ist dagegen $y(t)$ das Eingangssignal und $u(t)$ das Ausgangssignal, so ergibt sich

$$G(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = s T_1$$



T_1 ... D-Zeitkonstante

D (Differenzier) - **Glied**

Während sich rein mathematisch betrachtet u und y wie beim P-Glied beliebig vertauschen lassen, ist bei einem technischen System üblicherweise durch das physikalische Ursache-Wirkungsprinzip (**Kausalität**) vorgegeben, welche Größe Eingangssignal und welche Größe Ausgangssignal ist. **In realen technischen** Prozessen ist das **I-Verhalten häufig**, das **D-Verhalten selten**.

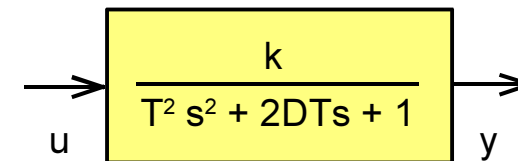
3.1 Blockschaltbilder und Übertragungsfunktionen

Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung $n > 1$ mit konstanten Koeffizienten könnten zwar direkt Laplace-transformiert werden und würden dann zu einer Übertragungsfunktion n . Ordnung führen:

$$k \cdot u(t) = T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2DT \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \quad \text{1 DGL 2.Ordnung}$$

Zugehöriges Blockschaltbild:

$$k U(s) = T^2 s^2 Y(s) + 2DT s Y(s) + Y(s)$$



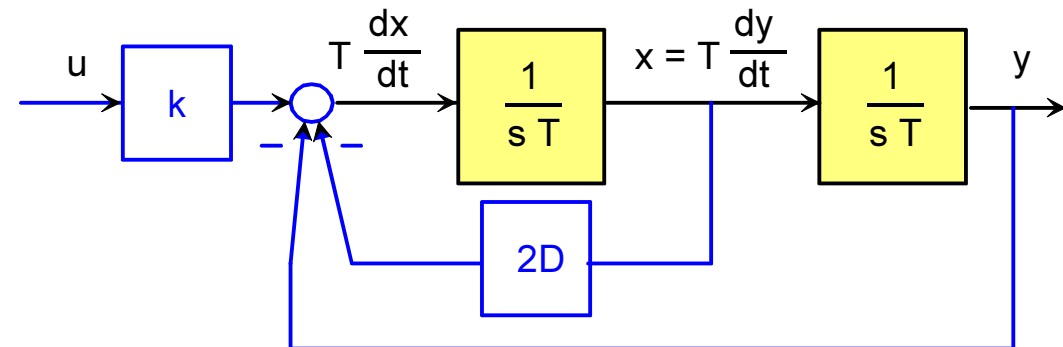
In der Praxis ist es aber oft besser, sie durch Substitution in n Differentialgleichungen 1. Ordnung umzuformen und diese dann im Blockschaltbild durch n I-Glieder darzustellen:

→ Substitution:

$$x(t) = T \frac{dy(t)}{dt}$$

$$k \cdot u(t) = T \frac{dx(t)}{dt} + 2D x(t) + y(t)$$

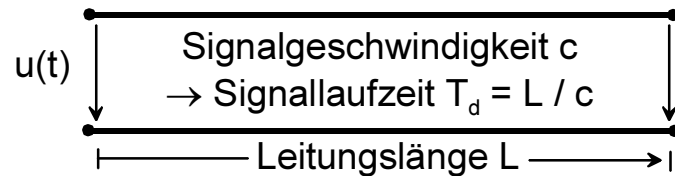
2 DGL 1.Ordnung



3.1 Blockschaltbilder und Übertragungsfunktionen

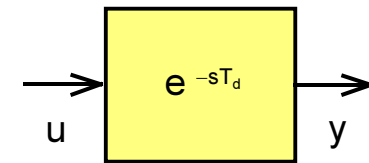
Transportvorgänge,

z.B. Leitungslaufzeit von Wellen



$$y(t) = u(t - T_d)$$

T_d ... Totzeit (Delay Time)

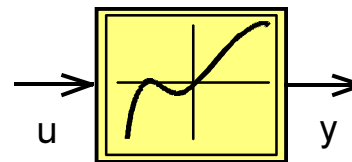


Totzeitglied

Nichtlineare Zusammenhänge können nicht durch eine Übertragungsfunktion beschrieben werden (Grund: Die Laplace-Transformation beruht auf dem Überlagerungsprinzip und dies gilt nur für lineare Systeme). Im Blockdiagramm wird daher direkt die nichtlineare Funktion eingetragen oder der nichtlineare Zusammenhang als Kennlinie eingezeichnet.

Nichtlineare Funktion

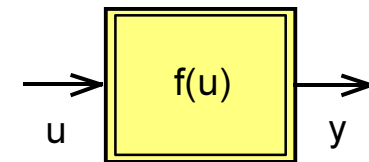
$$y(t) = f(u(t))$$



Kennlinie

oder

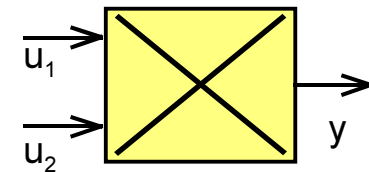
nichtlineare Funktion



Multiplikation von Signalen

(Division entsprechend)

$$y(t) = u_1(t) \cdot u_2(t)$$

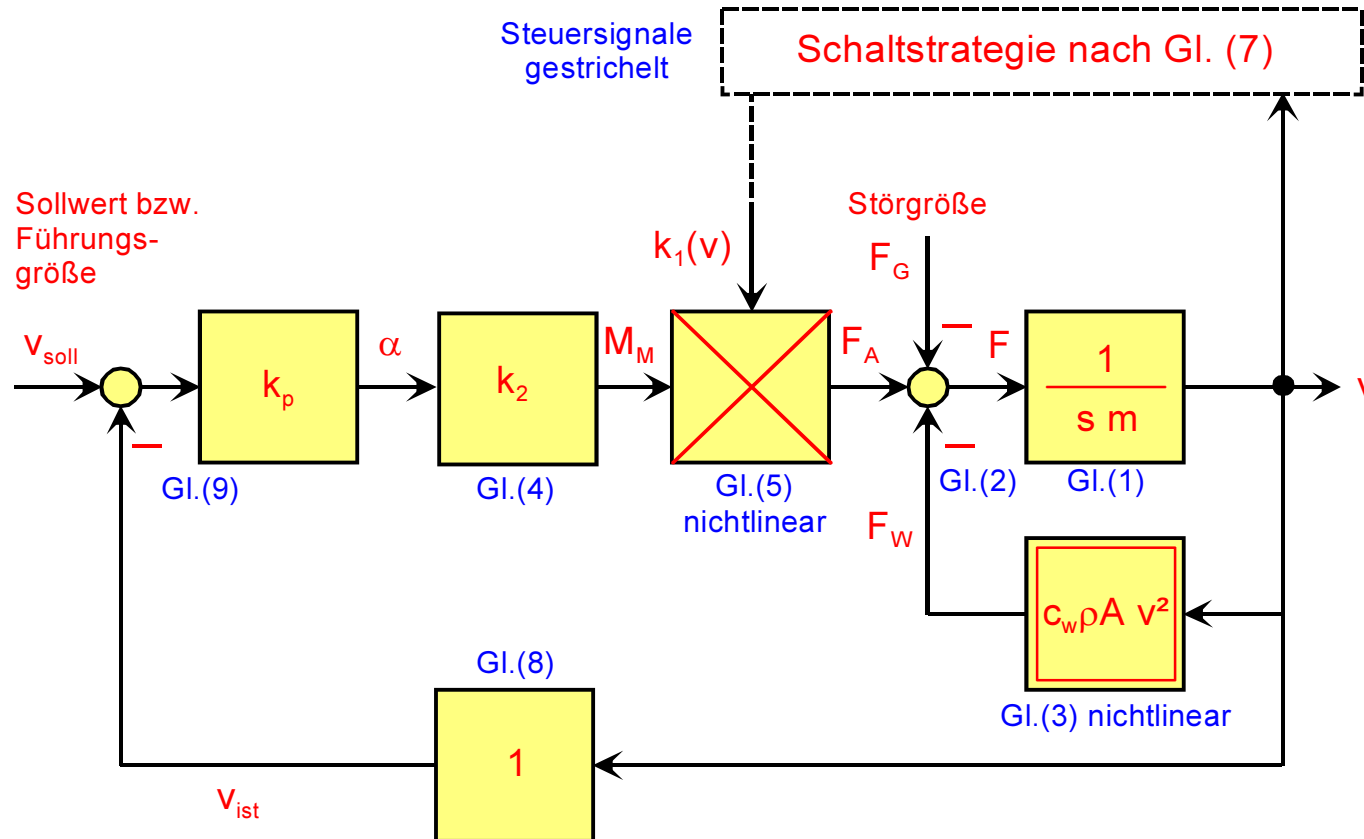


Multiplikation

Die Multiplikation (oder Division) von zwei Zeitsignalen ist eine nichtlineare Funktion, während die Multiplikation eines einzelnen Zeitsignals mit einer Konstanten (P-Glied) eine lineare Funktion ist.

3.1 Blockschaltbilder und Übertragungsfunktionen

Blockschaltbild der Fahrgeschwindigkeitsregelung



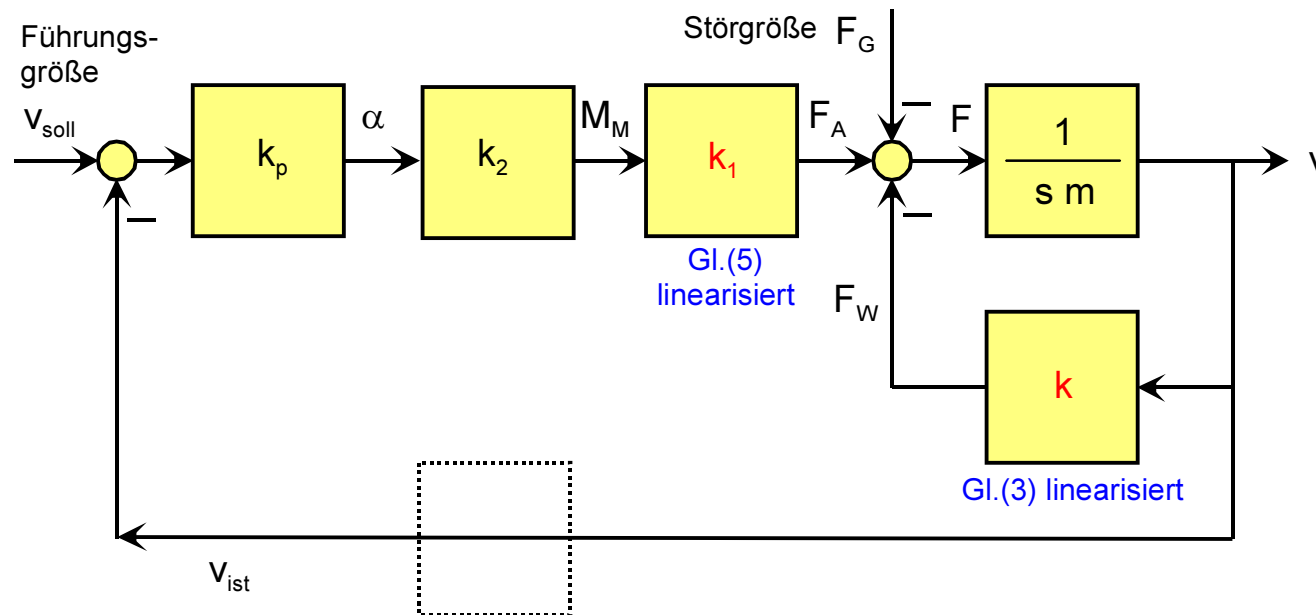
Wenn das Blockschaltbild **ausschließlich lineare Blöcke** enthalten würde, könnte das gesamte dynamische Verhalten des Systems durch die

Führungs-ÜF $G_w(s) = \frac{V(s)}{V_{soll}(s)}$ und die **Stör-ÜF** $G_v(s) = \frac{V(s)}{F_G(s)}$ beschrieben werden.

3.1 Blockschaltbilder und Übertragungsfunktionen

Annahmen:

- Fahren in konstantem Gang, d.h. $k_1 = \text{const.}$, d.h. keine Schaltvorgänge
→ Multiplikation Gl.(5) durch P-Glied ersetzen
- Luftwiderstand durch lineare Funktion angenähert (Herleitung erfolgt später): $F_W(t) \approx k \cdot v(t)$
→ Nichtlinearer Block Gl.(3) durch P-Glied ersetzen



Ansatz:
$$V(s) = \frac{1}{s \cdot m} \cdot \{ -F_G(s) - k \cdot V(s) + k_1 \cdot k_2 \cdot k_p [V_{soll}(s) - V(s)] \}$$

Anwendung des Überlagerungsprinzips:

für Führungs-ÜF $F_G(t)=0$ setzen

für Stör-ÜF $v_{soll}(t)=0$ setzen

3.1 Blockschaltbilder und Übertragungsfunktionen

Führungs-ÜF: $V(s) = \frac{1}{s \cdot m} \cdot \{ -k \cdot V(s) + k_1 \cdot k_2 \cdot k_p [V_{\text{soll}}(s) - V(s)] \}$

→ $V(s) \cdot \{ s \cdot m + k + k_1 \cdot k_2 \cdot k_p \} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_p \cdot V_{\text{soll}}(s)$

"Gleichstrom"verstärkung → 1 wenn $k_p \uparrow$

→ $\frac{V(s)}{V_{\text{soll}}(s)} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_p}{k + k_1 \cdot k_2 \cdot k_p + s \cdot m} = \frac{\frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_p}{k + k_1 \cdot k_2 \cdot k_p}}{1 + s \frac{m}{k + k_1 \cdot k_2 \cdot k_p}}$

Verhalten wie Tiefpass 1. Ordnung (PT1)

Zeitkonstante ↓ wenn $k_p \uparrow$

Stör-ÜF: $V(s) = \frac{1}{s \cdot m} \cdot \{ -F_G(s) - k \cdot V(s) + k_1 \cdot k_2 \cdot k_p [-V(s)] \}$

"Gleichstrom"verstärkung → 0 wenn $k_p \uparrow$

→ $\frac{V(s)}{F_G(s)} = \frac{-1}{k + k_1 \cdot k_2 \cdot k_p + s \cdot m} = - \frac{\frac{1}{k + k_1 \cdot k_2 \cdot k_p}}{1 + s \frac{m}{k + k_1 \cdot k_2 \cdot k_p}}$

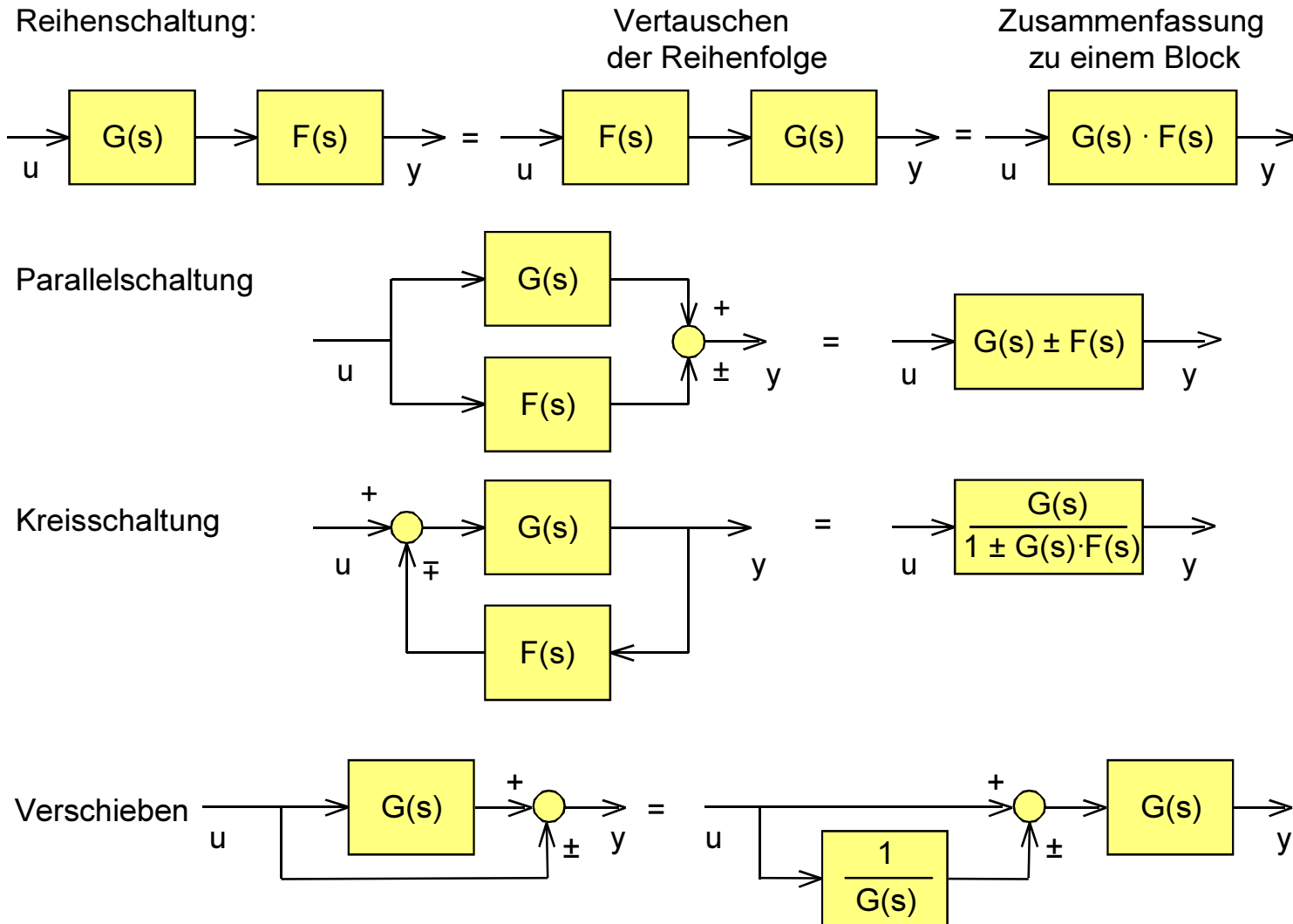
Selber Nenner wie bei Führungs-ÜF

An den Übertragungsfunktionen lassen sich die Beobachtungen der Simulation verifizieren

3.1 Blockschaltbilder und Übertragungsfunktionen

Umformung linearer Blockschaltbilder

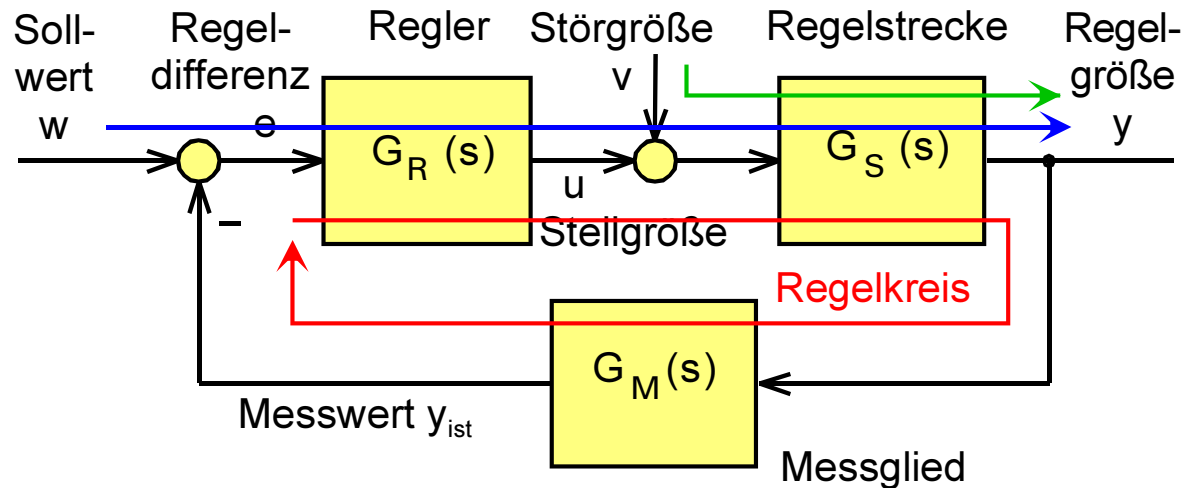
→ Übungsaufgabe BLOCK1



Achtung: Diese Blockschaltbild-Operationen sind **nur zulässig, wenn alle beteiligten Blöcke linear** sind!

3.2 Linearer Standardregelkreis

Linearer Standardregelkreis



Das Stellglied wird meist als Teil der Regelstrecke betrachtet.

Überlagerungsprinzip

$$Y(s) = G_W(s) \cdot W(s) + G_V(s) \cdot V(s)$$

Ansatz $v=0$: $Y(s) = G_S(s) \cdot G_R(s) \cdot \{ W(s) - G_M(s) \cdot Y(s) \}$

Führungsübertragungsfunktion $G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} |_{v=0} = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}$

Ansatz $w=0$: $Y(s) = G_S(s) \cdot \{ V(s) - G_R(s) \cdot G_M(s) \cdot Y(s) \}$

Störübertragungsfunktion $G_V(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} |_{w=0} = \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}$

Führungs- und Störübertragungsfunktion haben denselben Nenner, d.h. sie sind nicht unabhängig voneinander.

3.3 Lineare Grundblöcke

Lineare Grundblöcke

Statt der Übertragungsfunktion kann man bei den linearen Grundblöcken auch die Sprungantwort schematisch, d.h. ohne Achsenbezeichnung und Skalierung, in den Block eintragen:

	Zeitverhalten	ÜF $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$	Blockschaltbilddarstellung mit	
			Übertragungsfunktion	Sprungantwort
P-Glied	$y(t) = k \cdot u(t)$	$G(s) = k$		
I-Glied	$y(t) = \frac{1}{T_1} \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau$	$G(s) = \frac{1}{s T_1}$		
D-Glied	$y(t) = T_1 \cdot \frac{du(t)}{dt}$	$G(s) = s T_1$		
Totzeitglied	$y(t) = u(t - T_d)$	$G(s) = e^{-s T_d}$		

3.3 Lineare Grundblöcke

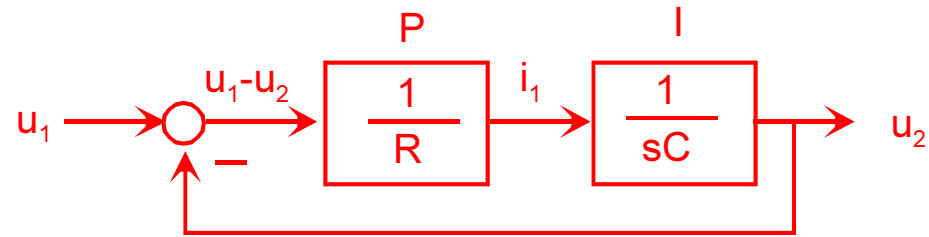
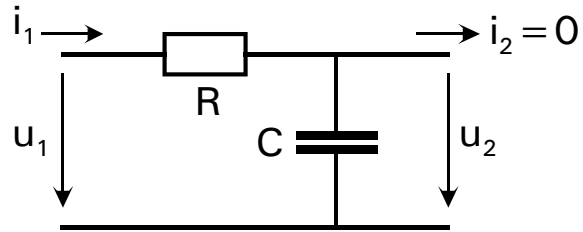
Theoretisch lassen sich sämtliche linearen Systeme durch Kombination der vier Grundblöcke P, I, D, T_d sowie Summationsstellen darstellen. Zur Vereinfachung führt man dennoch einige weitere Blöcke ein:

Tiefpass 1. Ordnung (PT1-Glied)	$k \cdot u(t) =$ $y(t) + T_1 \frac{dy(t)}{dt}$	$G(s) = \frac{k}{1 + s T_1}$		
Tiefpass 2. Ordnung (PT2-Glied)	$k \cdot u(t) =$ $y(t) + 2DT \frac{dy(t)}{dt} +$ $T_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2}$	$G(s) = \frac{k}{1 + s2DT + s^2T^2}$		
Hochpass 1. Ordnung (DT1-Glied)	$T_2 \cdot \frac{du(t)}{dt} =$ $y(t) + T_1 \frac{dy(t)}{dt}$	$G(s) = \frac{s T_2}{1 + s T_1}$		

DT1: Einzige tatsächlich realisierbare Form des D-Verhaltens, ideales D-Verhalten (Sprungantwort=Diracstoss) ist physikalisch nicht realisierbar.

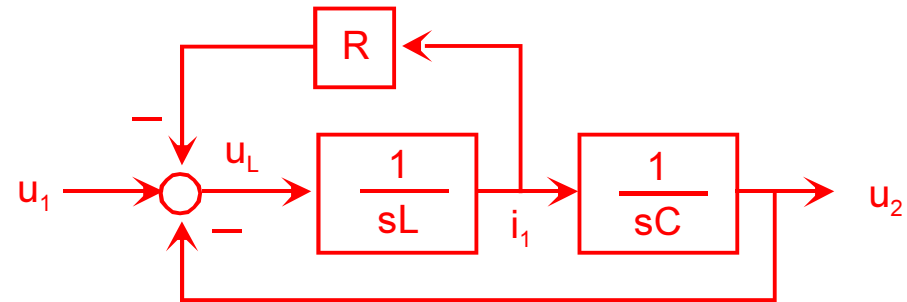
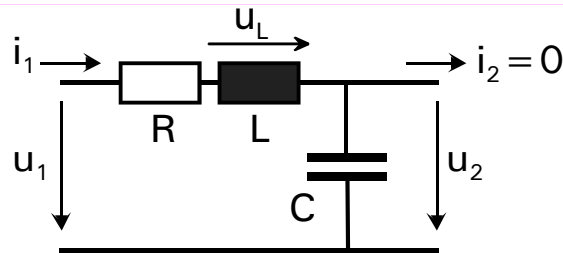
3.3 Lineare Grundblöcke

Beispiel PT1: RC-Glied



aus Blockschaltbild: $U_2(s) = \frac{1}{sC} \frac{1}{R} \{ U_1(s) - U_2(s) \} \quad \rightarrow \quad \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + sRC}$

Beispiel PT2: RLC-Glied



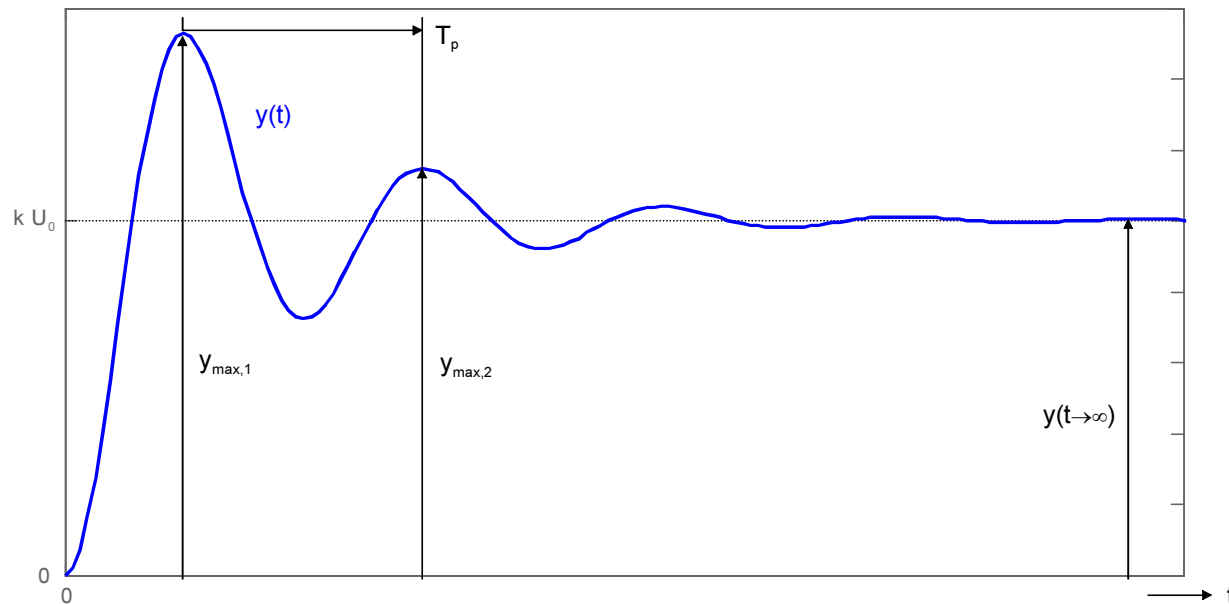
direkt aus Schaltbild $\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1/sC}{R+sL+1/sC} = \frac{1}{1+sRC+s^2LC}$

Resonanzkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Schwingkreiswiderstand $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ Güte $Q = \frac{Z}{R}$ Dämpfung $D = \frac{R}{2Z} = \frac{1}{2Q}$

3.3 Lineare Grundblöcke

Zum PT2-Glied $G(s) = \frac{k}{1+s2DT+s^2T^2}$ Sprungantwort für Eingangssignal $U_0 \cdot \sigma(t)$

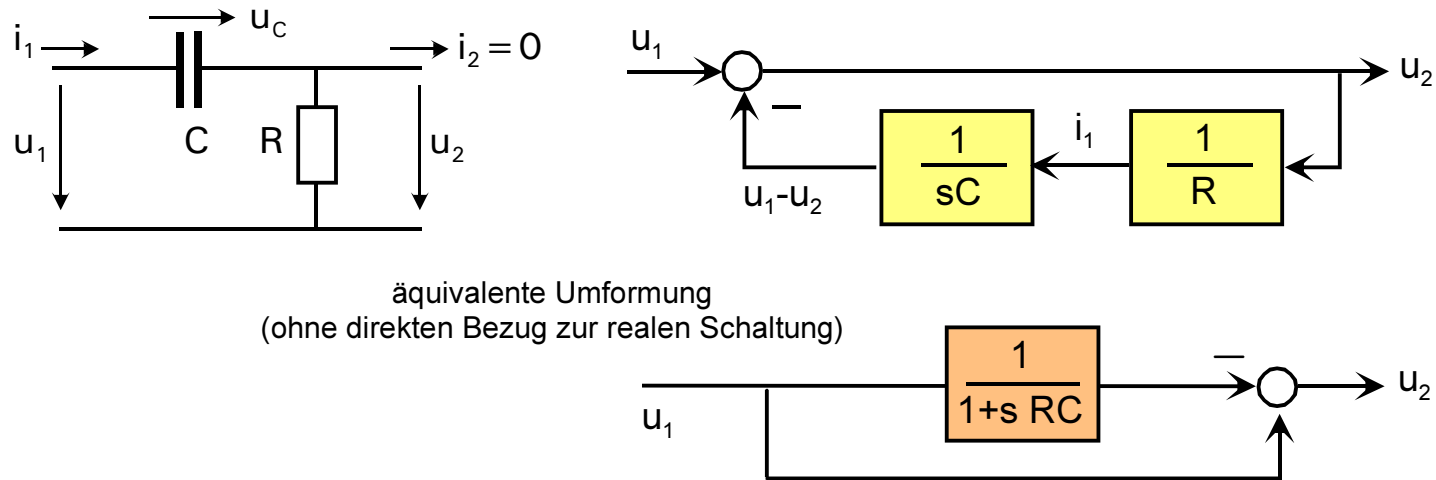
- Aus der Sprungantwort lässt sich die Verstärkung $k = \frac{y(t \rightarrow \infty)}{\text{Sprunghöhe } U_0 \text{ am Eingang}}$ ablesen (Anfangswerte 0)
- Falls $D < 1$ ist, tritt Überschwingen auf. Für die Überschwingweite gilt $a = \frac{y_{\max,1} - y(t \rightarrow \infty)}{y(t \rightarrow \infty)} \approx \sqrt{\frac{y_{\max,1}}{y_{\max,2}}}$



- Die Dämpfung lässt sich näherungsweise mit $D \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ln a}\right)^2}}$ bestimmen.
- Aus der Periodendauer der gedämpften Schwingung ergibt sich die Zeitkonstante $T \approx \frac{T_p}{2\pi} \sqrt{1-D^2}$

3.3 Lineare Grundblöcke

Beispiel DT1: CR-Glied



3.4 Linearisierung und Normierung von Blockschaltbildern und Übertragungsfunktionen

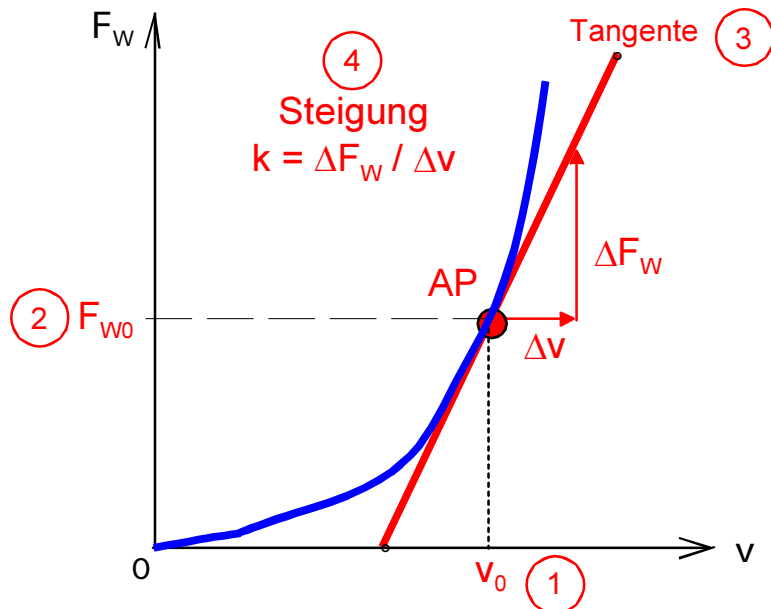
Linearisierung nichtlinearer Blöcke

Zweck: Näherung einer nichtlinearen durch eine lineare Funktion

Beispiel: Luftwiderstand des Fahrzeugs nach Gl. (3) $F_w = c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 = c \cdot v^2$

Graphische Linearisierung durch Gerade

- Festlegen, in welchem Arbeitspunkt v_0 bzw. in welchem Arbeitsbereich der Fehler der Näherung klein sein soll
- Tangente im Arbeitspunkt AP oder Sekante durch den Arbeitsbereich



Linearisierung durch Reihenentwicklung

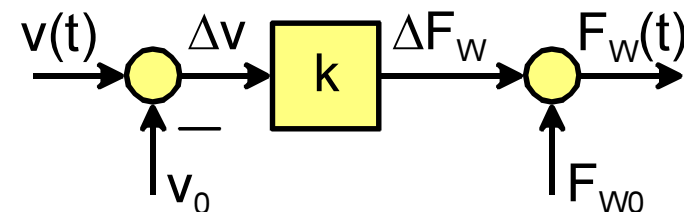
- Arbeitspunkt v_0 festlegen
- Reihenentwicklung nach Taylor mit Abbruch nach dem Linearglied

$$F_w \approx F_w(v_0) + \left. \frac{\partial F_w}{\partial v} \right|_{v=v_0} \cdot (v - v_0)$$

$$\rightarrow F_w = F_{w0} + k \cdot (v - v_0)$$

$$\text{mit } F_{w0} = c \cdot v_0^2 \quad k = 2c \cdot v_0$$

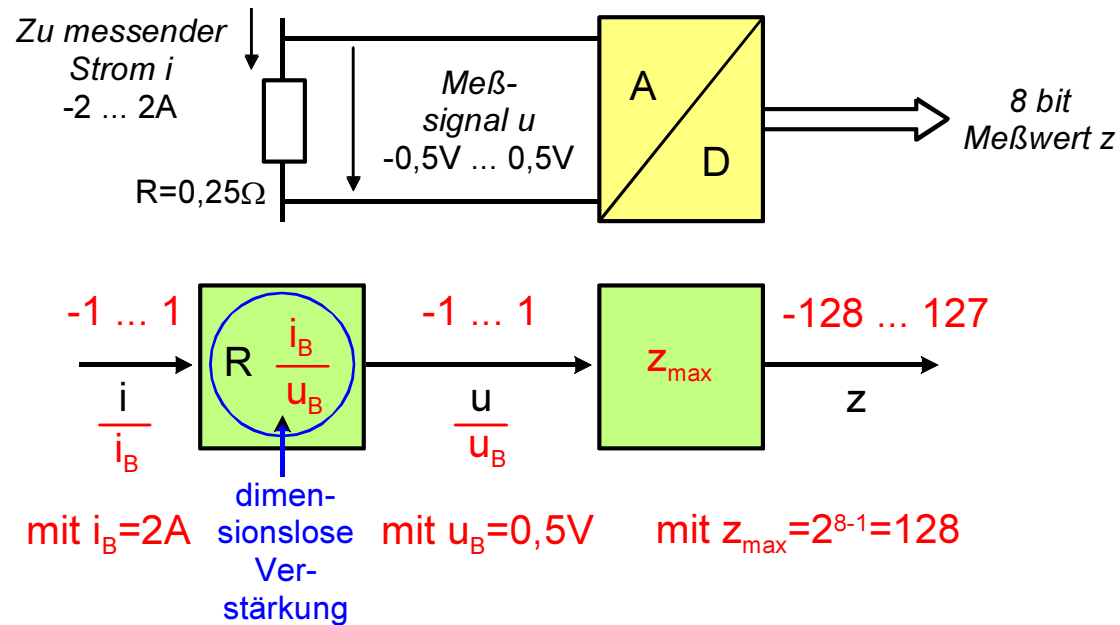
Im Blockschaltbild:



3.4 Linearisierung und Normierung von Blockschaltbildern und Übertragungsfunktionen

Normierung von Blockschaltbildern

- Umwandlung absoluter physikalischer Signale in relative Größen und Transformation des Wertebereichs



$$x_{\text{Relativ}} = \frac{x_{\text{Absolut}}}{x_{\text{Bezug}}}$$

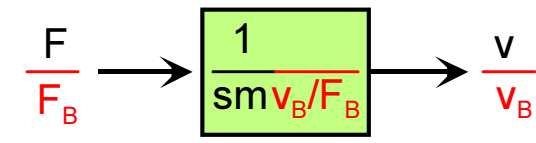
$x_{\text{Absolut}}, x_{\text{Bezug}}$... dimensionsbehaftet
 x_{Relativ} ... dimensionslos

typische Bezugsgrößen x_{Bezug} :

- Maximalwerte
- Nennwerte
- Arbeitspunktwerte

Die Normierung macht nicht nur die Signale dimensionslos, sondern auch die Verstärkungsfaktoren von P-Gliedern (falls sowohl das Ein- als auch das Ausgangssignal normiert wird).

Bei I- oder PT1-Gliedern werden die Faktoren bei den s-Termen durch die Normierung zu echten Zeitkonstanten: $[m v_B/F_B] = [kg m/sec / (kg m / sec^2)] = [sec]$



Bei zeitdiskreten Systemen (siehe Kapitel 4) werden auch die Zeitkonstanten durch Normierung auf die Abtastzeit zu relativen, dimensionslosen Werten.

3.4 Linearisierung und Normierung von Blockschaltbildern und Übertragungsfunktionen

Normierung von Übertragungsfunktionen

Allgemeine Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + \dots + s^m \cdot b_m}{a_0 + s \cdot a_1 + s^2 \cdot a_2 + \dots + s^n \cdot a_n}$$

Normierung durch Ausklammern der Absolutglieder a_0 und b_0 im Zähler und Nenner:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1 + s \cdot \frac{b_1}{b_0} + s^2 \cdot \frac{b_2}{b_0} + \dots + s^m \cdot \frac{b_m}{b_0}}{1 + s \cdot \frac{a_1}{a_0} + s^2 \cdot \frac{a_2}{a_0} + \dots + s^n \cdot \frac{a_n}{a_0}}$$

In der normierten Form sind die Absolutglieder (Terme bei s^0) im Zähler und im Nenner jeweils 1.

Vorteile der normierten Übertragungsfunktion

- Die **Gleichstromverstärkung** kann direkt abgelesen werden $G(s=0) = G(\omega=0) = \frac{b_0}{a_0}$

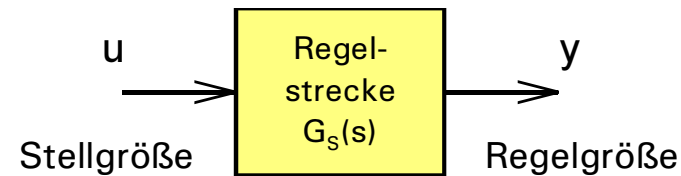
Falls das Eingangssignal $y(t)$ und Ausgangssignal $u(t)$ dieselbe Dimension haben bzw. beide normiert sind, ist die Gleichstromverstärkung dimensionslos. Die Gleichstromverstärkung beschreibt den eingeschwungenen Zustand, sofern das System stabil ist.

- Die Faktoren bei s , s^2 , ... sind **echte Zeitkonstanten**, Zeitkonstanten im Quadrat usw. mit der Dimension sec , sec^2 , ...

→ Übertragungsfunktionen sollten immer in normierter Form dargestellt werden!

3.5 Einteilung von Regelstrecken

Typen von Regelstrecken: LTI-Systeme

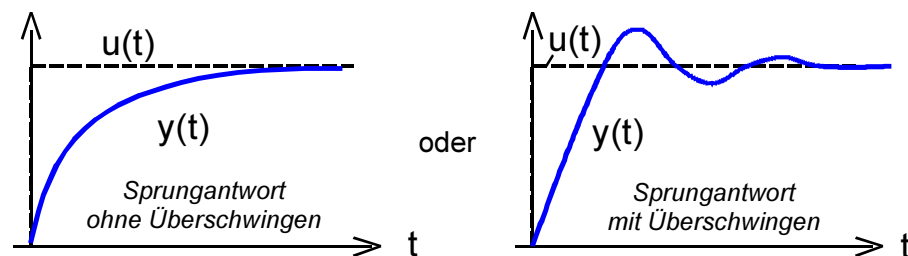


Systeme, bei denen alle Übertragungsblöcke linear sind und zeitlich konstante Parameter haben, werden als **LTI-(Linear Time Invariant)-Systeme** bezeichnet. Solche Systeme können durch eine Übertragungsfunktion beschrieben werden.

Klassifikation von LTI-Regelstrecken nach ihrer Sprungantwort:

Strecken mit Ausgleich

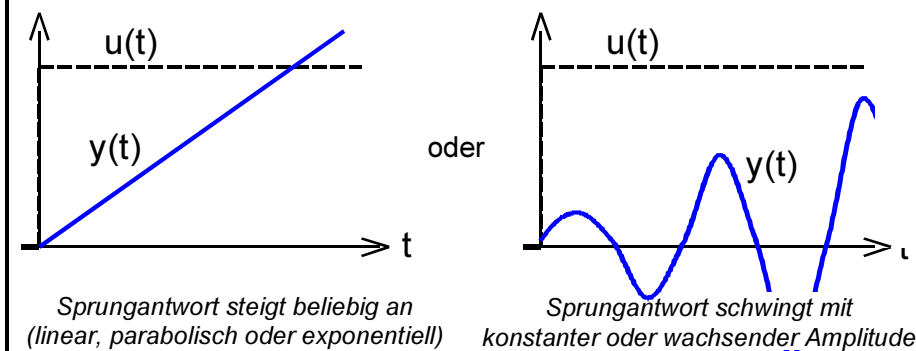
(Typ 0 Strecke)



- Ausgangsgröße am Ende des Einschwingvorgangs konstant (inkl. Sonderfall Endwert 0)
- im Frequenzgang erkennbar an $|G_S(s=0)| < \infty$ (endlich) bzw. alle Pole der ÜF in der linken s-Halbebene

Strecken ohne Ausgleich

(Typ 1 oder Typ 2 Strecke)



- Ausgangsgröße steigt beliebig an oder schwingt
- im Frequenzgang erkennbar an $|G_S(s=j\omega)| \rightarrow \infty$ bei mindestens einer Frequenz (oft bei $s=j\omega=0$) bzw. min-

3.5 Einteilung von Regelstrecken

Strecken mit Ausgleich ...

- arbeiten auch ohne Regler stabil
- sind leicht regelbar → Wahl des Reglertyps und der Reglerparameter unkritisch

destens ein Pol in der rechten s-Halbebene oder auf der imaginären Achse:

Übertragungsfunktion mit einem Pol bei $s=0$
→ Sprungantwort mit zeitlinearem Anstieg
Typ 1 Strecke

Übertragungsfunktion mit zwei Polen bei $s=0$
→ Sprungantwort mit quadratischem Anstieg
Typ 2 Strecke

Strecken ohne Ausgleich ...

- arbeiten ohne Regler nicht stabil
- sind schwer(er) regelbar → Reglertyp und Reglerparameter müssen sorgfältig gewählt werden

Klassifikation von Regelstrecken **nach** der **Anzahl der Ein- und Ausgänge**

Single Input – Single Output Systeme (SISO)

Systeme mit einem Eingang und einem Ausgang, werden durch eine Übertragungsfunktion beschrieben

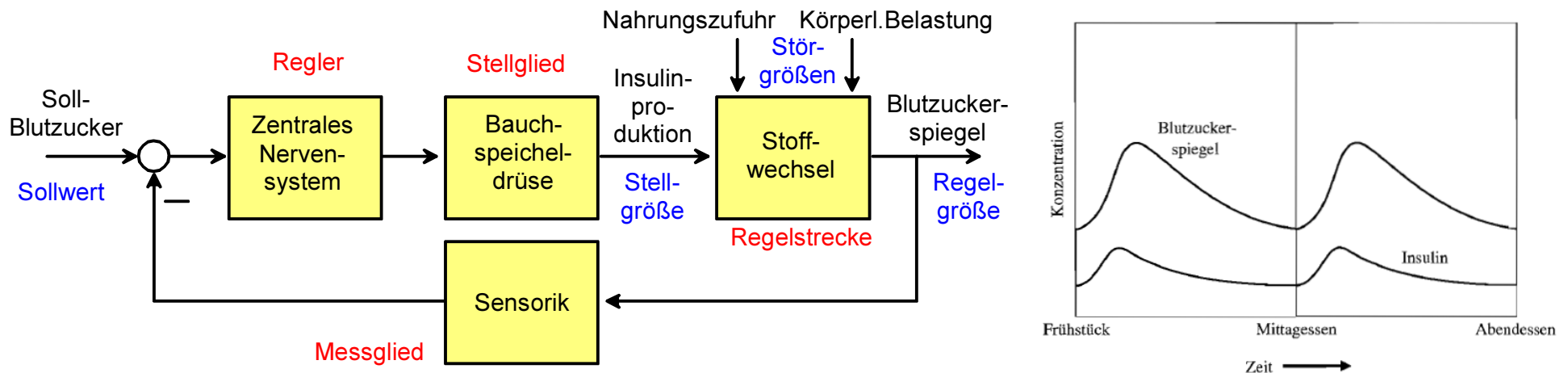
Multiple Input – Multiple Output Systeme (MIMO)

Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen, werden durch einen Satz von Übertragungsfunktionen beschrieben (je eine von jedem Eingang zu jedem Ausgang)

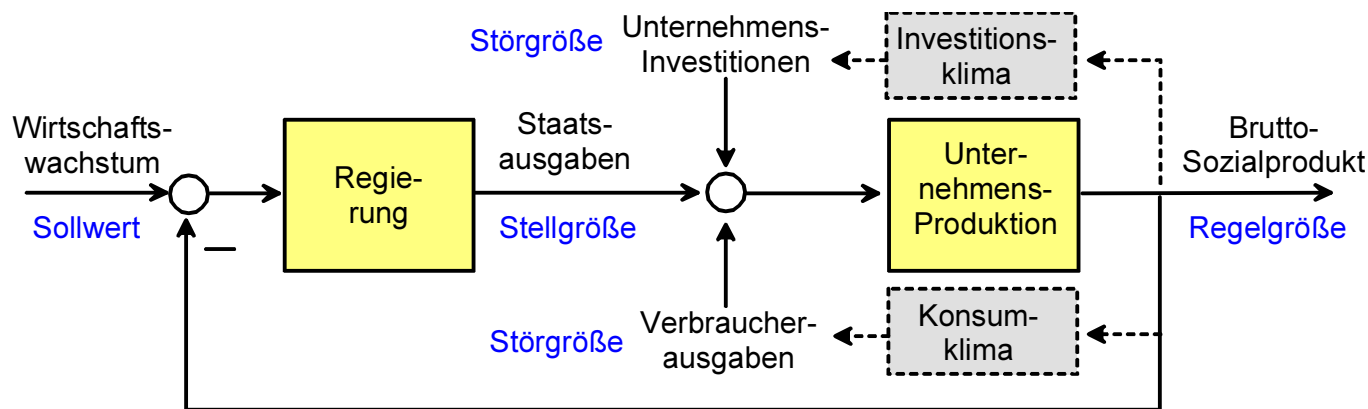
3.6 Universelle Bedeutung der Regelungstechnik

Blockschaltbilder und Analysemethoden der **Regelungstechnik** sind **nicht auf technische Systeme beschränkt**, sondern auch für biologische oder wirtschaftliche Systeme einsetzbar:

Beispiel eines biologischen Systems: Regelung des Blutzuckerspiegels

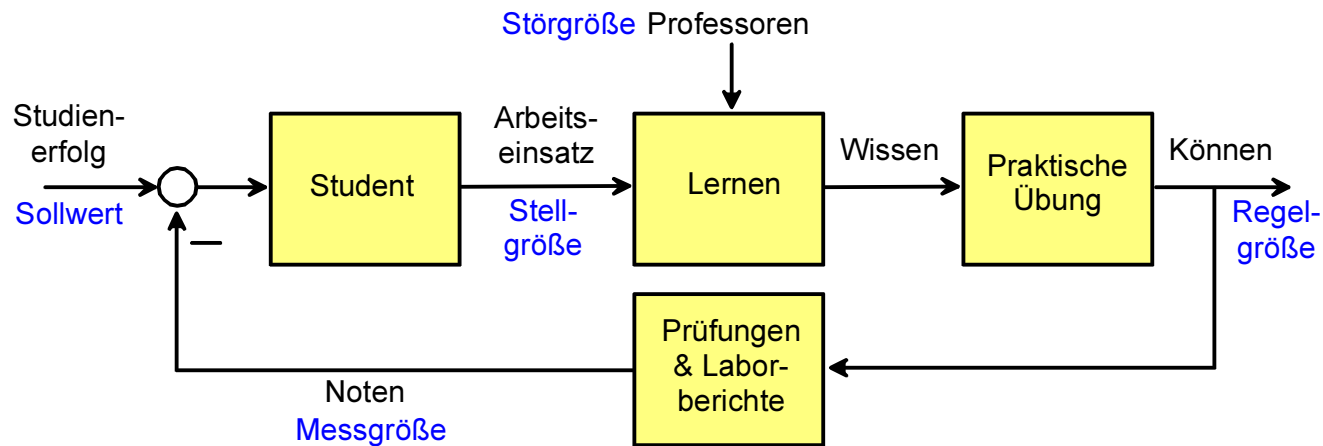


Beispiel eines Wirtschaftssystems: Vereinfachtes Wirtschaftsmodell nach Keynes



3.6 Universelle Bedeutung der Regelungstechnik

Studium als Regelsystem:



Wesentliche Charakteristika der Systeme:

- Es gibt eine wichtige Ausgangsgröße, die **Regelgröße**, die den Betrachter interessiert.
- Die Regelgröße soll einen gewünschten Zielwert, den **Sollwert**, annehmen.
- Es gibt eine **Stellgröße**, mit der die Regelgröße beeinflusst werden kann (**Wirkkette** mit **Ursache und Wirkung**). Die Regelgröße folgt der Stellgröße aber nur mit zeitlicher Verzögerung (**dynamisches Verhalten**).
- Neben der Stellgröße wirken auch andere Größen auf die Regelgröße, die vom Regler aber nicht beeinflusst werden können (**Störgrößen**).
- Es gibt ein deterministisches Verfahren, den **Regelalgorithmus**, mit dem die Stellgröße gezielt so angepasst wird, dass die Regelgröße möglichst wenig vom Sollwert abweicht. Dazu wird die Regelgröße gemessen und mit dem Sollwert verglichen (**Rückkopplung**).
- Der Regelalgorithmus muss so gewählt werden, dass das System zügig, aber nicht übermäßig reagiert und unter keinen Umständen ins Schwingen gerät (**Stabilität**).

Anhang Beschreibung im Zeitbereich (Ausblick)

Wie im Kapitel 3.1 beschrieben, lassen sich technische Systeme mit kontinuierlichen Signalen mit Hilfe von Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen beschreiben. Solche Beschreibungen lassen sich in der Form

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1 (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t)) \\ &\dots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t))\end{aligned}$$

darstellen, wobei $f_1(), \dots, f_n()$ und $g()$ beliebige nichtlineare Funktionen sind. $u(t)$ ist das Eingangssignal, $y(t)$ ist das Ausgangssignal. $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sind die sogenannten Zustandsgrößen, die in der Regel den Energiezustand des Systems beschreiben, z.B. Spannungen an Kondensatoren, Ströme durch Spulen, Wege und Geschwindigkeiten bewegter Körper, Druck und Massenströme von Gasen und Flüssigkeiten usw. Derartige nichtlineare Differentialgleichungssysteme lassen sich mit Simulationsprogrammen, z.B. der Matlab-Funktion ODE23() numerisch lösen.

Wenn die Gleichungen linear sind (LTI-Systeme), lässt sich das Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Form (**Zustandsgleichungen – State Space Form**) darstellen:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) + b_1 u(t)$$

...

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = a_{n1} x_1(t) + a_{n2} x_2(t) + \dots + a_{nn} x_n(t) + b_n u(t)$$

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) + d u(t)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + d \cdot u$$

Simulationsprogramme wie Matlab arbeiten häufig intern statt mit Übertragungsfunktionen bevorzugt mit dieser Matrixdarstellung, weil sie zu numerisch zuverlässigeren Algorithmen führt.

Kapitel 4

Einfache analoge und digitale Regelsysteme

4.1	Allgemeiner linearer Standardregelkreis	2
4.2	Statisches Verhalten von linearen Regelkreisen (Genauigkeit).....	4
4.3	Analoge PID-artige Regler	8
4.4	Kaskadenregelung	14
4.5	Digitale PID-artige Regler.....	15
4.6	Dynamisches Verhalten von linearen Regelkreisen (Stabilität)	20
4.7	Stabilitätsüberprüfung nach Hurwitz	21
4.8	Stabilitätsüberprüfung nach Nyquist	24
4.9	Reglerauslegung mit Polkompensation und Phasenreserve.....	29
4.10	Erfahrungsregeln zur Reglereinstellung	41
4.11	Nichtlineare Elemente: Schaltende Regler, Begrenzungen, Windup-Effekte	45
4.12	Führungsgrößengeneratoren und Vorsteuerung	53

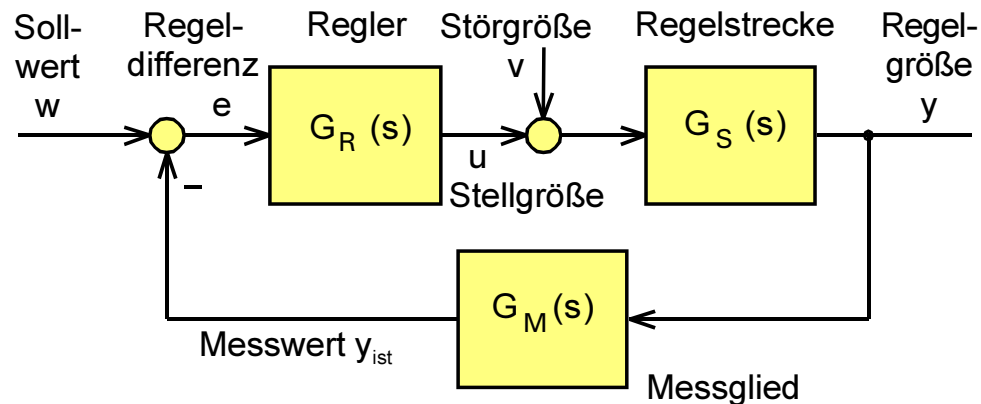
Anhang Laplace und z-Transformation (→ separates Dokument)

Anhang Frequenzgang der wichtigsten Übertragungsglieder (→ separates Dokument)

Anhang Bemerkungen und Hinweise für Fortgeschrittene (→ separates Dokument)

4.1 Lineare Regelkreise

Allgemeiner linearer Standardregelkreis



Das Stellglied wird meist als Teil der Regelstrecke betrachtet.

$$Y(s) = G_W(s) \cdot W(s) + G_V(s) \cdot V(s)$$

Ziel (bei $G_M(s=0)=1$):

$$G_W(s) \rightarrow 1, G_V(s) \rightarrow 0$$

$$\text{Führungsübertragungsfunktion} \quad G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} \Big|_{v=0} = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)} \quad (1)$$

$$\text{Störübertragungsfunktion} \quad G_V(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} \Big|_{w=0} = \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)} \quad (2)$$

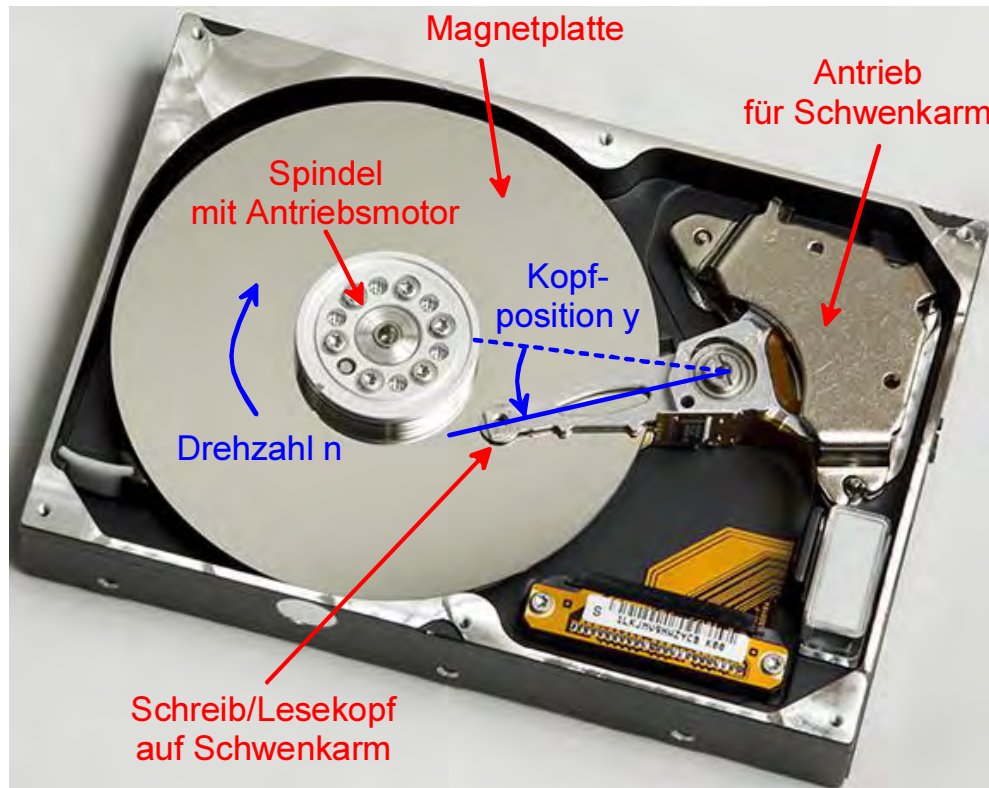
Führungs- und Störübertragungsfunktion haben denselben Nenner, d.h. sie sind nicht unabhängig voneinander.

Typische Aufgabenstellungen:

- **Führungs- bzw. Folgeregelung** (Tracking Control, Servo Control)
Sollwert zeitlich veränderlich, Regelgröße soll Sollwert mit geringer Verzögerung folgen
- **Festwertregelung** (Regulator Control)
Sollwert zeitlich konstant, Störgrößen zeitlich veränderlich. Einfluß der Störgrößen auf die Regelgröße soll möglichst gut unterdrückt („ausgeregelt“) werden.

4.1 Lineare Regelkreise

Anwendungsbeispiel Festplatte



- Die Datenbits sind durch Magnetisierung (Nord- und Südpole für 0 bzw. 1) seriell auf den konzentrischen Spuren ("Zylinder") der Magnetplatte aufgebracht. Die Daten einer größeren Datei können über verschiedenen Spuren beliebig auf der Magnetplatte verteilt sein.
- Der Spindelmotor wird auf eine konstante **Drehzahl n** (z.B. 7200 min^{-1}) geregelt (**Festwertregelung**). Die Drehzahl bestimmt die Taktfrequenz, mit der die Datenbits gelesen bzw. geschrieben werden können.

- Das Lesen und Schreiben der Daten erfolgt durch eine kleine Spule (Schreib-/Lesekopf "Head"), die an der Spitze eines Schwenkarms angebracht ist.
- Der Schreib-/Lesekopf wird mit dem Schwenkarm möglichst schnell auf die entsprechende Spur bewegt. Die **Position y** des Kopfs wird geregelt (**Führungsregelung**). Die Einschwinggeschwindigkeit bestimmt, wie schnell eine Datei gefunden wird, die Positionsgenauigkeit, wie eng die Spuren nebeneinander liegen dürfen, d.h. die Kapazität der Platte.

4.2 Statisches Verhalten von Regelkreisen

Statisches Verhalten von linearen Regelkreisen: Genauigkeit und bleibende Regelabweichung im eingeschwungenen Zustand

Der Wert der Regelgröße bei konstantem Sollwert bzw. konstanter Störgröße läßt sich aus der „Gleichstromverstärkung“ der Übertragungsfunktion ermitteln:

$$y(t \rightarrow \infty) = G_W(s=0) \cdot w(t \rightarrow \infty) + G_V(s=0) \cdot v(t \rightarrow \infty) \quad \text{Voraussetzung:}$$

bzw.
$$e(t \rightarrow \infty) = w(t \rightarrow \infty) - G_M(s=0) \cdot y(t \rightarrow \infty) \quad \text{geschlossener Regelkreis stabil}$$

Die **bleibende Regelabweichung** verschwindet, d.h. $y(t \rightarrow \infty) = w(t \rightarrow \infty)$ bei $G_M(s=0) = 1$, wenn $G_W(s=0) = 1$ und $G_V(s=0) = 0$ wird. Nach Gleichung (1) bzw. (2) bedeutet dies, dass

- beim Führungsverhalten $G_R(s=0) \rightarrow \infty$ oder $G_S(0) \rightarrow \infty$
- beim Störverhalten $G_R(s=0) \rightarrow \infty$ sein muss.

Beide Bedingungen lassen sich erfüllen, wenn die **Übertragungsfunktion des Reglers** einen Pol bei $s=0$ hat, d.h. **I-Verhalten** aufweist, denn dann ist $G_R(s=0) \rightarrow \infty$.

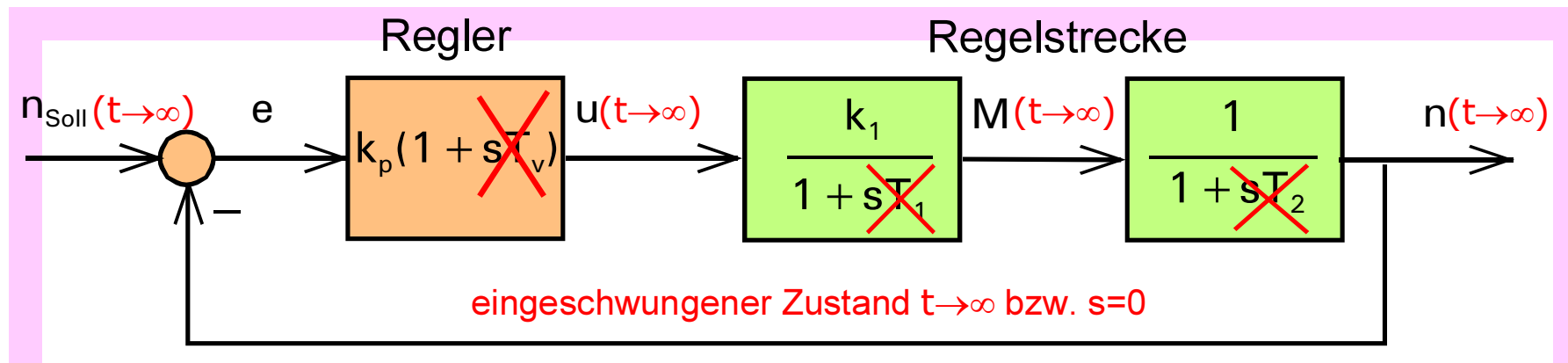
Werden die Bedingungen nicht erfüllt, kann die Regelabweichung verringert werden, indem die Proportionalverstärkung k_p des Reglers so groß wie möglich gemacht wird, aber:

- Die Genauigkeit der Regelung wird durch das Messglied begrenzt. **Der geschlossene Regelkreis kann niemals genauer sein als das Messglied.**

4.2 Statisches Verhalten von Regelkreisen

Anstatt die vollständige Übertragungsfunktion $G_W(s)$ bzw. $G_V(s)$ zu ermitteln und dann $s=0$ einzusetzen, kann man bei den Blöcken **im Blockschaltbild direkt $s=0$ setzen** und dann über Gl. (1) bzw. (2) die „Gleichstromverstärkung“ unmittelbar bestimmen.

Beispiel: Drehzahlregelung des Spindelmotors der Festplatte



u ... Ansteuerspannung

M ... Drehmoment

n ... Drehzahl des Spindelmotors

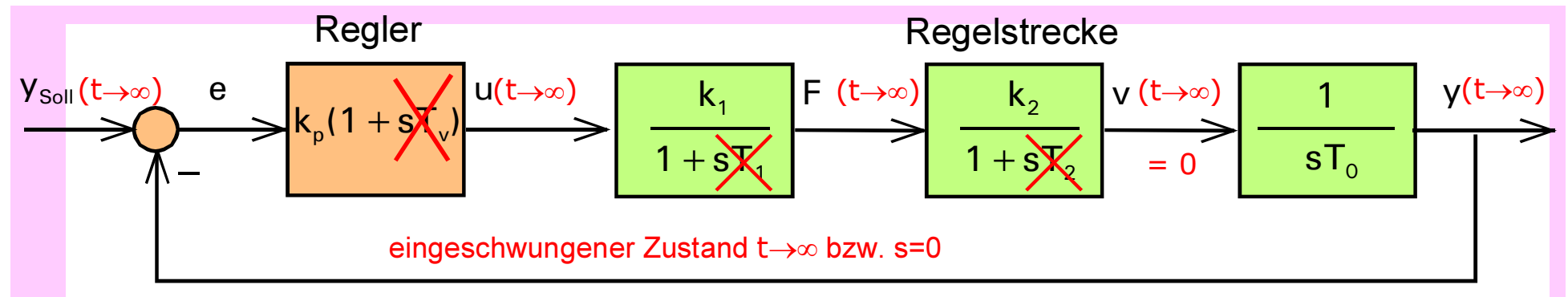
$$G_W(s=0) = \frac{N(s=0)}{N_{\text{Soll}}(s=0)} = \frac{k_p k_1}{1 + k_p k_1} < 1$$

$$\rightarrow n(t \rightarrow \infty) = \frac{k_p k_1}{1 + k_p k_1} n_{\text{Soll}}(t \rightarrow \infty) \quad \text{bzw.} \quad e(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{1 + k_p k_1} n_{\text{Soll}}(t \rightarrow \infty)$$

4.2 Statisches Verhalten von Regelkreisen

Aber: Bei Blöcken mit I-Verhalten darf nicht $s = 0$ gesetzt werden!

Beispiel: Lageregelung des Schreib-/Lesekopfs der Festplatte



u ... Ansteuerspannung F ... Antriebskraft v ... Geschwindigkeit y ... Position des Schwenkarms

Bei konstantem Sollwert stellt sich in einem stabilen System ein stationärer Zustand ein, in dem auch alle anderen Signale konstant sind (zeitliche Ableitungen 0). Dies setzt voraus, dass die **Eingangssignale aller Blöcke mit I-Verhalten im eingeschwungenen Zustand stets 0** sein müssen, da die Ausgangsgrößen der I-Blöcke nur dann konstant sind.

Mit
$$v(t \rightarrow \infty) = k_p \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot e(t \rightarrow \infty) = 0$$

ergibt sich
$$e(t \rightarrow \infty) = 0 \quad \text{und damit} \quad y(t \rightarrow \infty) = y_{\text{soll}}(t \rightarrow \infty).$$

4.2 Statisches Verhalten von Regelkreisen

Bedeutung für Reglerentwurf

Typische Genauigkeits-Anforderung

- bleibende Regelabweichung $\frac{e(t \rightarrow \infty)}{y_{\text{soll}}(t \rightarrow \infty)} \leq X\% \rightarrow$ legt Minimalwert $k_{P,\text{min}}$ für k_P fest

Beispiel Drehzahlregelung Festplatte

$$\frac{e(t \rightarrow \infty)}{n_{\text{soll}}(t \rightarrow \infty)} = \frac{1}{1 + k_P k_1} \leq 1\% \rightarrow k_P \geq \frac{1}{k_1} \left[\frac{1}{0,01} - 1 \right] = \frac{99}{k_1} = k_{P,\text{min}}$$

oder

- theoretische ^{*1} Extremforderung: keine bleibende Regelabweichung

$$e(t \rightarrow \infty) = 0 \rightarrow \text{Regler mit I-Anteil notwendig}$$

Hinweis ^{*1}:

In den obigen Beispielen wurde ein ideales Messglied vorausgesetzt. Die Formeln auf Seite 4.4 gelten auch für ein Messglied mit Messfehler. Die bleibende Regelabweichung wird in der Praxis niemals kleiner sein können als der Messfehler des realen Messglieds, da der Regler (auch der I-Regler) nicht die echte Regelgröße, sondern den gegebenenfalls falsch gemessenen Istwert regelt.

4.3 Analoge PID-artige Regler

Analoge PID-artige Regler

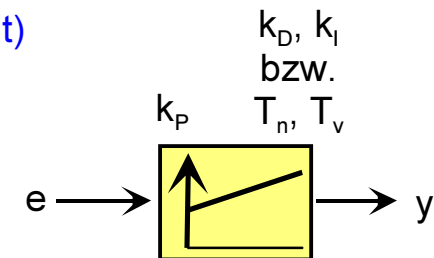
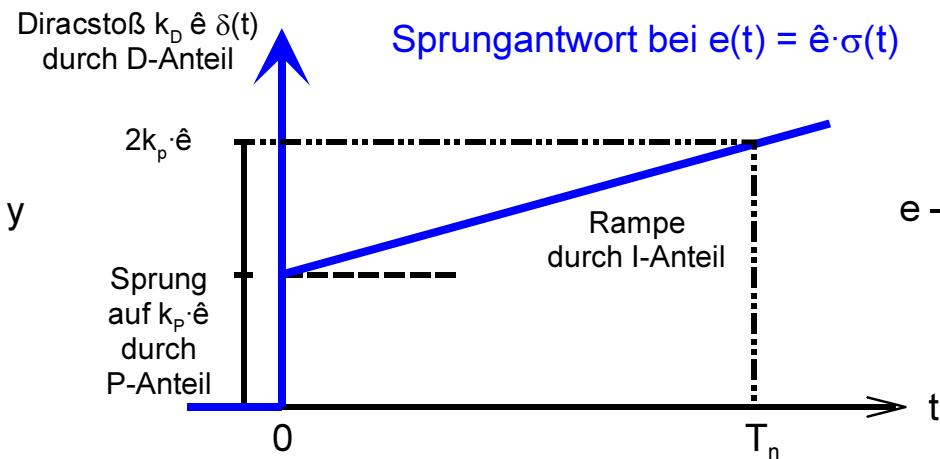
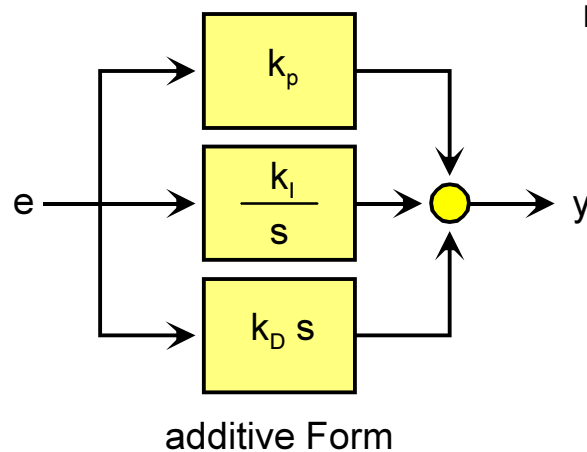
Die in der Praxis am häufigsten eingesetzten Regler sind PID-artige Regler, die aus der Parallelschaltung eines P-, eines I- und eines D-Blocks entstehen (sogenannte *additive Form*):

$$G_{R,PID}(s) = k_P + k_I \frac{1}{s} + k_D s = k_p \left\{ 1 + \frac{1}{sT_n} + s T_v \right\} = k_p \frac{1 + s T_n + s^2 T_n T_v}{s T_n}$$

mit k_p ... P-Verstärkung, $k_I = \frac{k_p}{T_n}$... I-Verstärkung, $k_D = k_p T_v$... D-Verstärkung

T_n ... Nachstellzeit T_v ... Vorhaltezeit

Typische Dimensionierung: $T_n \gg T_v$



4.3 Analoge PID-artige Regler

- **bleibende Regelabweichung** wird **durch I-Anteil eliminiert**, da $G_R(s=0) \rightarrow \infty$, allerdings verschlechtert der I-Anteil das dynamische Verhalten, da er verzögernd wirkt.
- **gutes dynamisches Verhalten durch** den **P-Anteil**, da der P-Anteil auf Änderungen von $e(t)$ ohne Verzögerung reagiert.
- **Bandbreite des Regelkreises durch D-Anteil vergrößert** (und Stabilitätsprobleme verringert), da die Verstärkung des D-Anteils (und die Phase) bei höheren Frequenzen steigt und so den Abfall der Verstärkung (und die Phasennacheilung) der Regelstrecke teilweise kompensiert, die sich bei hohen Frequenzen typischerweise wie ein Tiefpass höherer Ordnung verhält. Der Verstärkungsanstieg bei hohen Frequenzen führt aber leider auch zu **Problemen mit höherfrequenten Stör- und Rauschsignalen**, die ebenfalls verstärkt werden. Da hochfrequente Störsignale und Rauschen bei realen Systemen oft auftreten, muss der **D-Anteil** häufig **weggelassen** werden ($k_D=0 \rightarrow$ PI-Regler) **oder zumindest** der D-Anteil **durch** einen **DT1-Anteil** ersetzt werden, damit der Verstärkungsanstieg bei hohen Frequenzen begrenzt wird:

$$\text{PIDT1-Regler } G_{R,PID}(s) = k_p \left\{ 1 + \frac{1}{sT_n} + s \frac{T_v}{1+sT_1} \right\} = k_R \frac{1 + s(T_i+T_d) + s^2 T_i T_d}{sT_i(1+sT_1)}$$


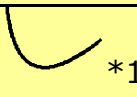
Ideale D-Anteile sind ohnehin nicht physikalisch realisierbar.

Typische Dimensionierung: $T_1 = T_v/10$

Alternativ kann das Tiefpassfilter $1/(1+sT_1)$ auch in das Messglied integriert werden.

4.3 Analoge PID-artige Regler

Qualitativer Einfluss der Reglerparameter im Regelkreis

Parameter	Überschwingweite a	Anregelzeit T_{an}	Ausregelzeit T_{aus}	Regelabweichung $e(\infty)$
$k_P \uparrow$ bewirkt	\uparrow	\downarrow		\downarrow (ohne I-Anteil)
$k_I \uparrow$ bewirkt	\uparrow	\downarrow		Immer 0
$k_D \uparrow$ bewirkt	\downarrow		\downarrow	Kein Einfluss

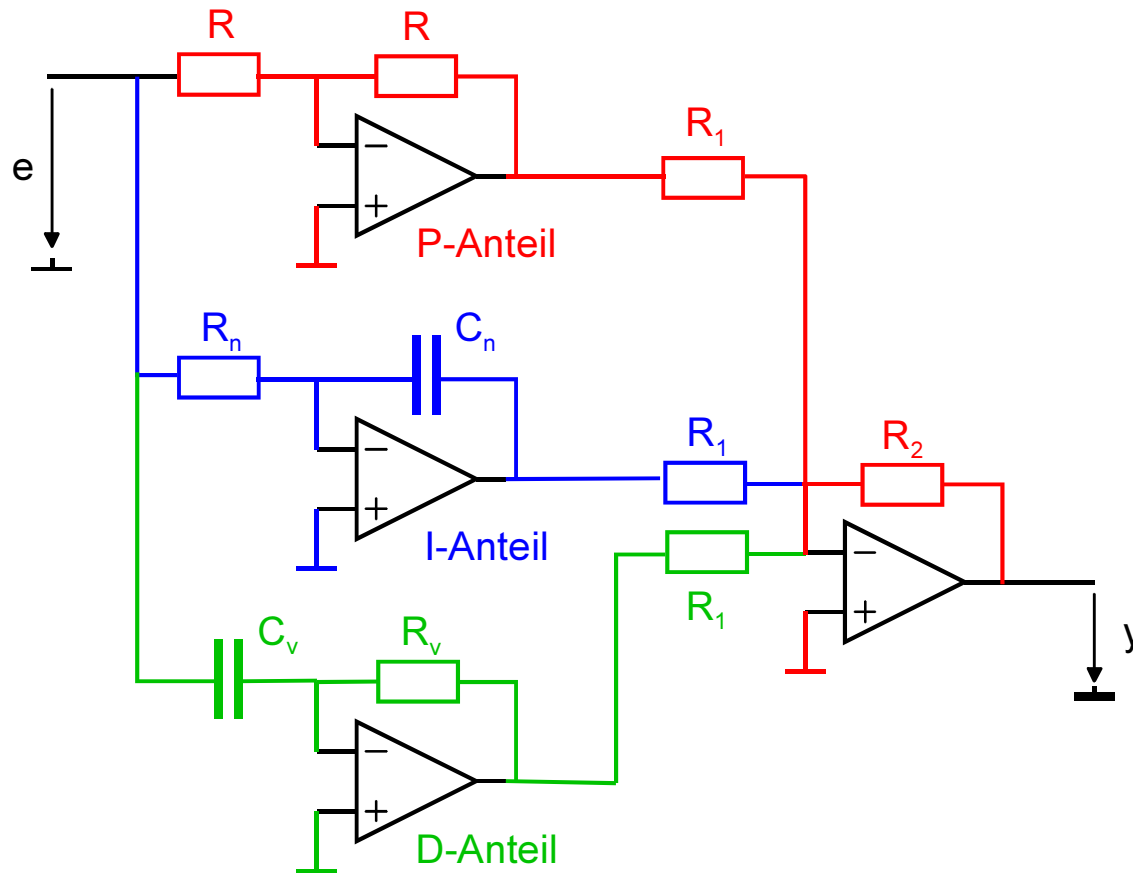
*1 bei kleinen Werten von a gilt: $k_P \uparrow$ bzw. $k_I \uparrow \rightarrow T_{aus} \downarrow$, bei größeren Werten von a gilt: $k_P \uparrow$ bzw. $k_I \uparrow \rightarrow T_{aus} \uparrow$

Statt des echten PID-Reglers werden häufig folgende Unterformen eingesetzt:

PI-Regler	$k_D=0$	Wenn Rausch- und Störsignale problematisch sind, häufigster Reglertyp in der Praxis
PD-Regler	$k_I=0$	Wenn das statische Verhalten keine Rolle spielt
P-Regler	$k_D=0, k_I=0$	Wenn das statische Verhalten keine Rolle spielt und Probleme mit Rausch- und Störsignalen vermieden werden sollen
I-Regler	$k_P=0, k_D=0$	Wenn nur das statische Verhalten wichtig ist, praktisch selten
D-Regler	$k_P=0, k_I=0$	Praktisch nie eingesetzt, außer bei reinen Wechselstromsystemen, da statisches Verhalten unbrauchbar $G_R(s=0)=0$

4.3 Analoge PID-artige Regler

Realisierung analoger P I D - Regler

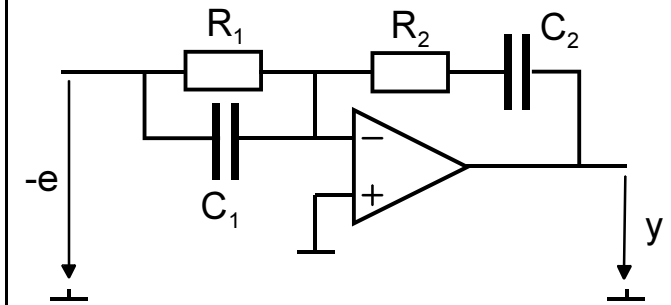


$$k_p = \frac{R_2}{R_1}$$

$$T_n = R_n C_n$$

$$T_v = R_v C_v$$

Direkte Implementierung der **additiven Form**



$$k_R = \frac{R_2}{R_1} \quad T_i = R_2 C_2 \quad T_d = R_1 C_1$$

Direkte Implementierung der **multiplikativen Form**

4.3 Analoge PID-artige Regler

Aus praktischen Gründen wird statt der **additiven Form** $G_{R,PID}(s) = k_P \frac{1 + s T_n + s^2 T_n T_v}{s T_n}$

der PID-Regler-Übertragungsfunktion häufig die sogenannte **multiplikative Form** verwendet:

$$G_{R,PID}(s) = k_R \frac{(1 + s T_i) \cdot (1 + s T_d)}{s T_i} = k_R \frac{1 + s (T_i + T_d) + s^2 T_i T_d}{s T_i}$$

Die beiden Formen können ineinander umgerechnet werden, wie man durch Koeffizientenvergleich beweisen kann:

- multiplikativ \rightarrow additiv: $T_n = T_i + T_d$ $T_v = \frac{T_i T_d}{T_n} = \frac{T_i T_d}{T_i + T_d}$

Umrechnung immer möglich

$$k_p = k_R \frac{T_n}{T_i} = k_R \frac{T_i + T_d}{T_i}$$

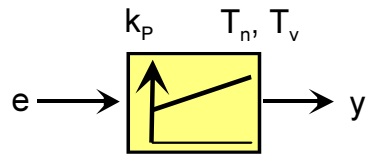
- additiv \rightarrow multiplikativ:

$$T_i = \frac{T_n}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4 \frac{T_v}{T_n}} \right) \quad T_d = 2 T_v \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 4 \frac{T_v}{T_n}}}$$

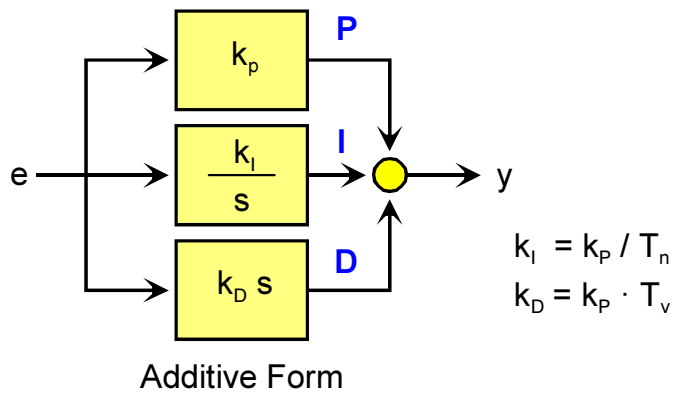
Umrechnung nur möglich, wenn $T_n \geq 4 T_v$ $k_R = \frac{k_p}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4 \frac{T_v}{T_n}} \right)$

4.3 Analoge PID-artige Regler

Blockstruktur von PID-Reglern

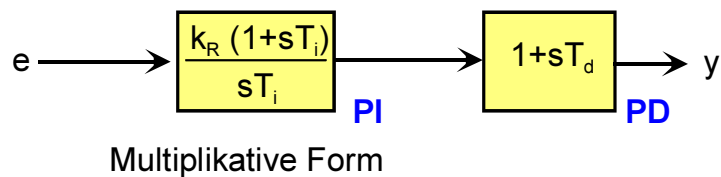
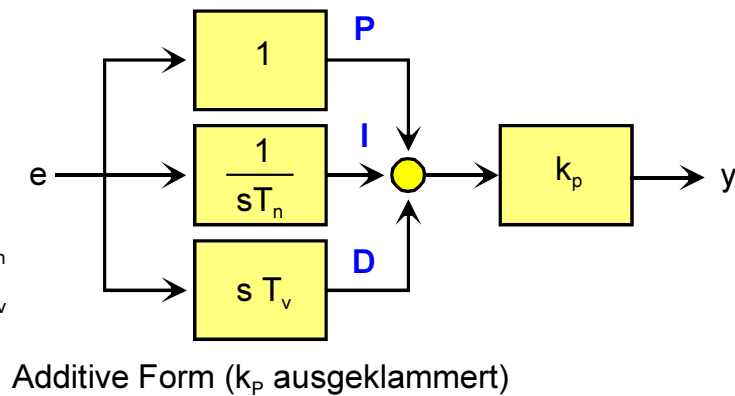


Standardform: Vereinfachte Darstellung



$$k_I = k_p / T_n$$

$$k_D = k_p \cdot T_v$$

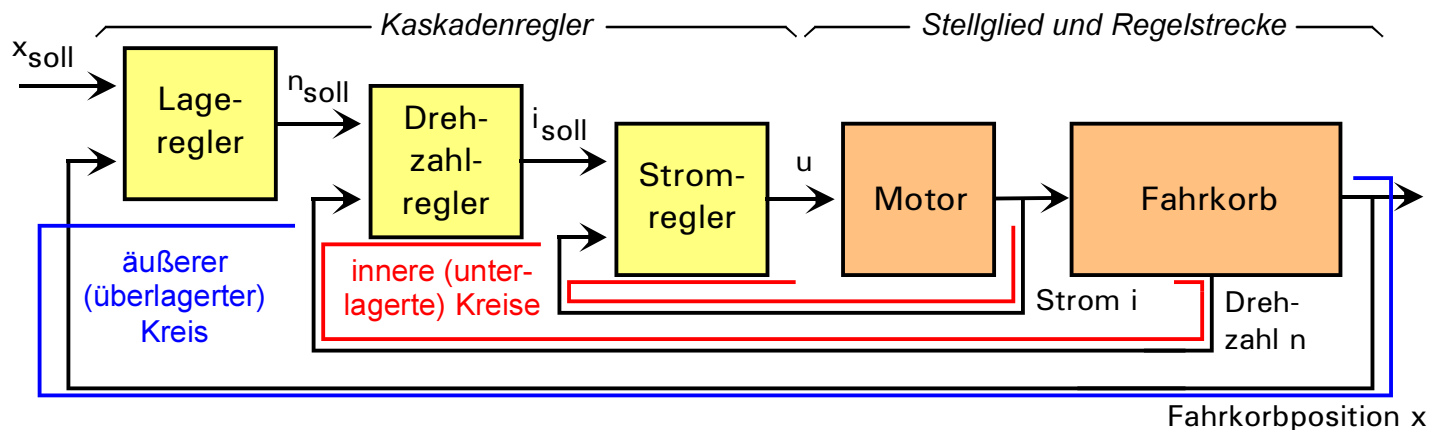


$$G_{R,PID}(s) = k_p + k_I \frac{1}{s} + k_D s = k_p \left\{ 1 + \frac{1}{s T_n} + s T_v \right\} = k_R \frac{(1 + s T_i) \cdot (1 + s T_d)}{s T_i}$$

Additiv
Additiv (k_p ausgeklammert)
Multiplikativ

4.4 Kaskadenregelungen

Aufzugsregelung als Beispiel für eine Kaskadenregelung



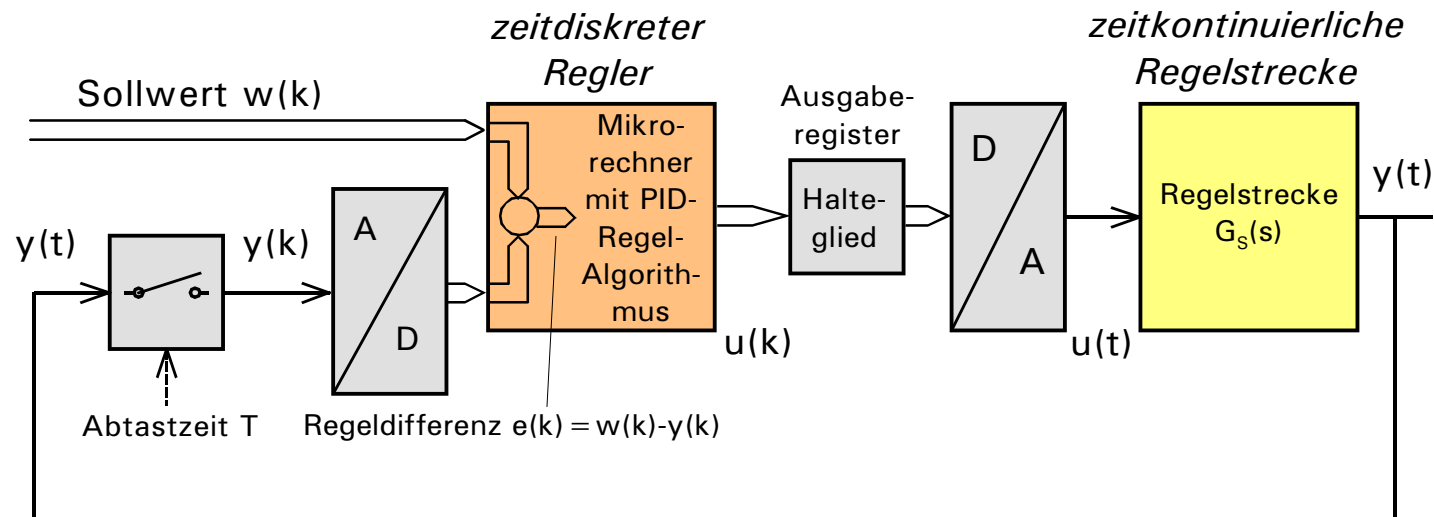
Reglerentwurf und Inbetriebnahme erfolgen von innen nach aussen

Regelstrecken höherer Ordnung ($n > 2 \dots 3$), insbesondere Strecken ohne Ausgleich, lassen sich mit einem einschleifigen PID-artigen Regler oft nicht befriedigend regeln, weil nur die Ausgangsgröße vom Regler erfasst wird, ohne die inneren dynamischen Vorgänge in der Strecke zu erfassen. Für solche Fälle setzt man Kaskadenregler mit PID-artigen Reglern ein:

- Stellgröße des äußeren Reglers = Sollwert des inneren Reglers
- Äußerer Regler mit PI-Verhalten (wegen bleibender Regelabweichung), innere Regler mit P- oder PI-Verhalten.
- Durch Einsatz eines inneren Regelkreises kann häufig der bei Rauschen kritische D-Anteil vermieden werden, der bei einem einschleifigen PID-Regler vielleicht notwendig wäre.
- Einfacher Schutz des Stellglieds oder der Regelstrecke, in dem die Sollwerte der einzelnen Regler begrenzt werden.
- Vorstufe zum Zustandsregler, bei dem alle Zustandsgrößen zurückgeführt werden.

4.5 Digitale PID-artige Regler

Digitale PID-artige Regler



Probleme:

- **Quantisierung**
praktisch meist kein Problem bei 8...12bit Auflösung, aber Rundungs- und Überlauf-effekte
- **Abtastung**
wegen A/D-Umsetzung und Rechenzeit, wirkt verzögernd, verschlechtert Regelverhalten

- Das zeitkontinuierliche Signal $y(t)$ wird zu den diskreten Zeitpunkten $t=k \cdot T$, $k=0,1,2,\dots$ abgetastet, kürzere Schreibweise: $y(t=k \cdot T) = y(kT) = y(k)$
- Die Ausgangsgröße des zeitdiskreten Reglers wird zwischen den Abtastzeitpunkten konstant gehalten: $u(t)=u(k)$ für $k \cdot T \leq t < (k+1) \cdot T$ (Halteglied)

Vorteile digitaler Regler:

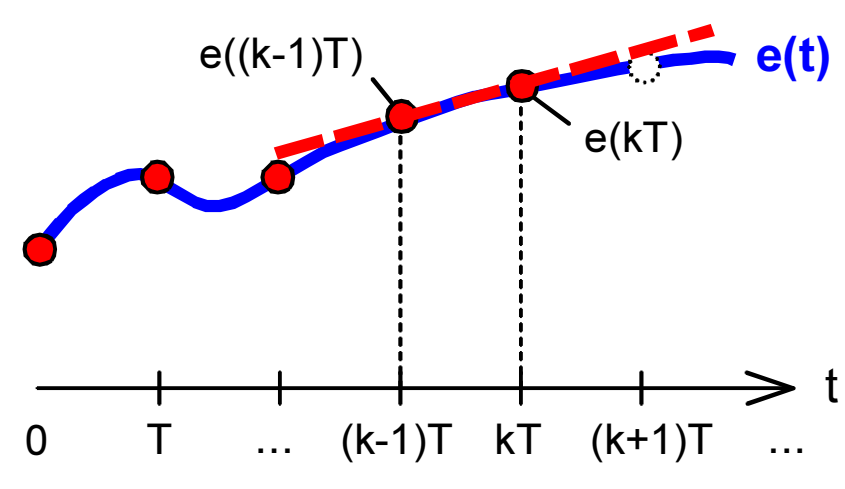
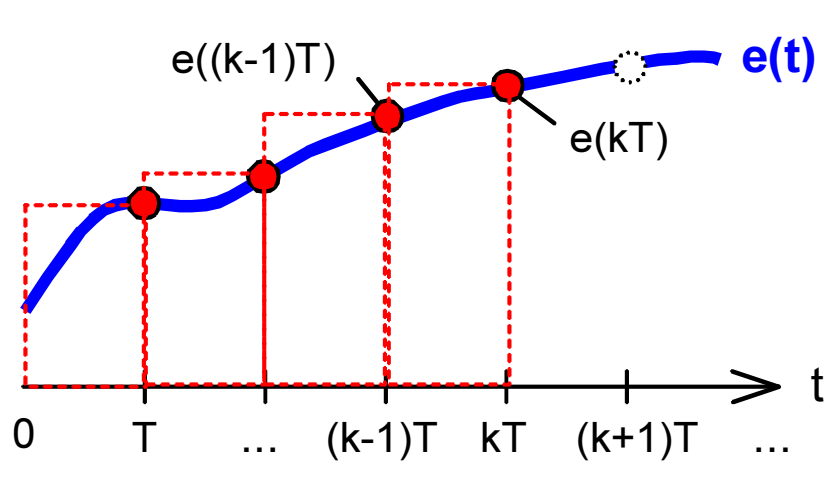
- Über die Regelung hinausgehende Steuer-, Überwachungs-, Anzeige- und Bedienfunktionen leicht integrierbar.
- Unterschiedliche Reglertypen mit einer einheitlichen Hardware durch Austausch der Software realisierbar.
- (Fast) gleiches dynamisches Verhalten wie bei analogen Regler, aber auch komplexere Regelalgorithmen möglich.
- Regelparameter auch im Betrieb einfach an den aktuellen Betriebszustand der Regelstrecke und des Stellglieds anpassbar.

4.5 Digitale PID-artige Regler

Diskreter PID-Regelalgorithmus

$$u(t) = k_p \cdot e(t) + k_p \cdot \frac{1}{T_n} \cdot \int_{\tau=0}^t e(\tau) d\tau + k_p \cdot T_v \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

Diskretisierung der Zeitfunktion ^{*1}



$$\int_{\tau=0}^t e(\tau) d\tau \approx \sum_{v=0}^k e(v) \cdot T = \sum_{v=0}^{k-1} e(v) \cdot T + e(k) \cdot T$$

Rechteckregel

$$\left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \quad \text{Euler-rückwärts}$$

^{*1} Die Diskretisierung einer kontinuierlichen Zeitfunktion ist eine Näherung. Dabei gibt es verschiedene Diskretisierungsmethoden mit unterschiedlichen Eigenschaften (explizite und implizite Euler Methode, Trapez usw.), von denen aber neben den hier verwendeten nur wenige andere für die Anwendung in Echtzeitsystemen geeignet sind.

4.5 Digitale PID-artige Regler

Damit gesamter **zeitdiskreter PID-Algorithmus** mit $u_i(k) = u_i(k-1) + k_p \frac{T}{T_n} e(k)$

$$u(k) = k_p \cdot e(k) + u_i(k) + k_p \frac{T_v}{T} \cdot [e(k) - e(k-1)] \quad \text{rekursive Formel}$$

Einfache **Realisierung durch** eine **C-Funktion** PID(), die periodisch aufgerufen werden muss:

```
float PID(float e) // ohne Ansteuerung des A/D- bzw. D/A-Umsetzers und ohne Regeldifferenzbildung
{
    const float kP = ... , // kP P-Anteil
    . kI = ... , // kI = kP*T/Tn I-Anteil
    . kD = ... ; // kD = kP*Tv/T D-Anteil
    . float u; // u(k)
    . static float ek_1 = 0, // e(k-1)
    . uI = 0;
    . uI = uI + kI * e; // ui(k)
    . u = kP * e + uI + kD * (e - ek_1);
    . ek_1 = e; // e(k) = e(k-1) (Vorber. Zeitschritt)
    . return u;
}
```

4.5 Digitale PID-artige Regler

Wahl der Abtastzeit

- **Abtasttheorem nach Nyquist/Shannon aus der digitalen Signalverarbeitung**

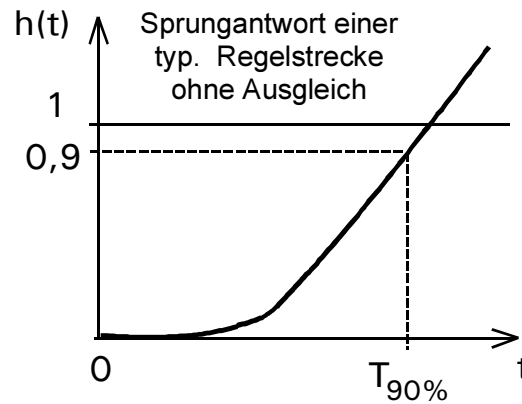
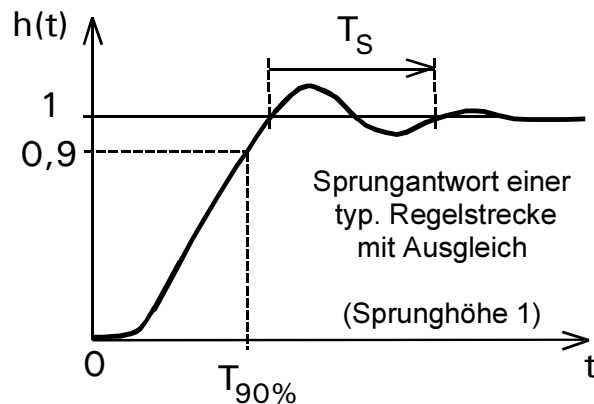
Bei einem im Frequenzbereich $f \leq f_g$ ideal bandbegrenzten System muss für die Abtastfrequenz gelten

$$f_A = \frac{1}{T} > 2 \cdot f_g \quad \text{d.h. } T < \frac{1}{2 f_g}$$

Für regelungstechnische Anwendungen kaum anwendbar, da Grenzfrequenz von Sollwert und Störgrößen selten bekannt.

- **Faustformel für die Abtastzeit, wenn Sprungantwort der Strecke bekannt**

Regler muss bezogen auf die Dynamik der Regelstrecke "oft genug" abtasten



$$T \leq \frac{\min(T_{90\%}, T_S, T_n^{*1}, T_v^{*1})}{5 \dots 10}$$

*1 falls Reglerdimensionierung bekannt

- **Faustformel, wenn Übertragungsfunktion der Strecke bekannt**

$$G_S(s) = \frac{v}{(1+sT_1)(1+sT_2)\dots(1+sT_n)}$$

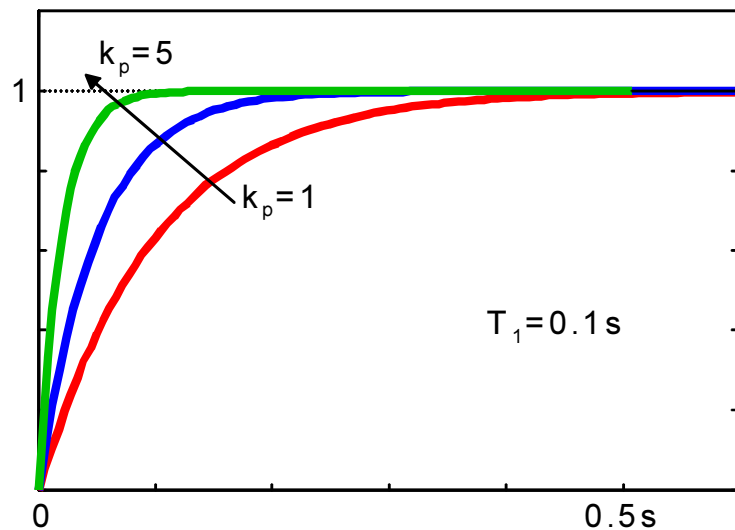
$$\rightarrow T \leq \frac{T_1+T_2+\dots+T_n}{5 \dots 10}$$

4.5 Digitale PID-artige Regler

Einfluss der Abtastung auf die Dynamik und die Stabilität des Regelkreises

Beispiel: P-Regler $G_R = k_p$ mit I-Regelstrecke $G_S(s) = \frac{1}{sT_1} \rightarrow G_W(s) = \frac{1}{1 + s\frac{T_1}{k_p}}$ **PT1-Verhalten**

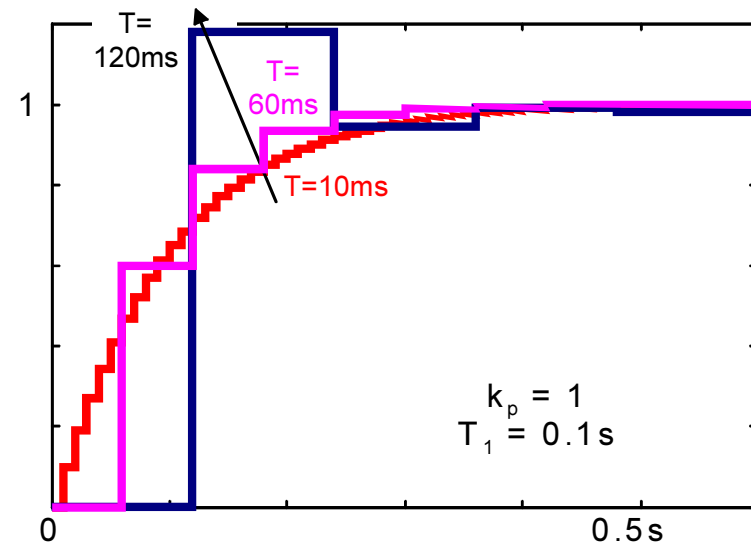
Regler zeitkontinuierlich



Exponentielle Sprungantwort ohne Überschwingen, d.h. immer stabil

→ kann durch größeres k_p (fast beliebig) schneller gemacht werden

Regler zeitdiskret



Abtastzeit $T \uparrow \rightarrow$ Dämpfung \downarrow
 \rightarrow Überschwingen \uparrow

→ bei zu großen Abtastzeiten T (und/oder bei großen Reglerverstärkungen k_p) instabil

Bestimmung der Stabilitätsgrenze für T über Phasenreserve oder z-Übertragungsfunktion siehe später

4.6 Dynamisches Verhalten von linearen Regelkreisen

Stabilität

Der geschlossene **Regelkreis** ist nur **stabil, wenn alle Pole** der Führungs- bzw. Störübertragungsfunktion **in der linken s-Halbebene** liegen. Wenn ein oder mehrere Pole auf der imaginären Achse oder in der rechten s-Halbebene liegen, ist der Kreis instabil.

Die **Pole** (=Nullstellen des Nenners) der Übertragungsfunktion lassen sich theoretisch **aus der charakteristischen Gleichung**

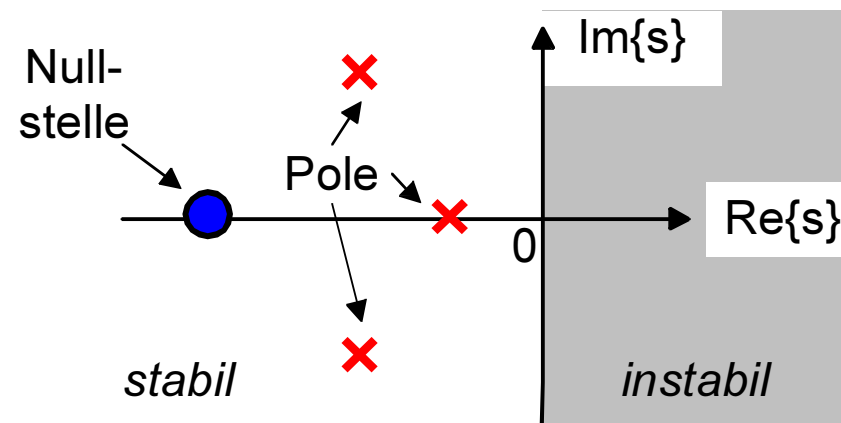
$$1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s) = 0$$

ermitteln. In der Praxis lässt sich diese Gleichung aber nur bei Systemen 2. Ordnung analytisch lösen, bei Systemen höherer Ordnung ist im allgemeinen nur eine numerische Lösung, z.B. mit den Matlab-Funktionen `roots()` bzw. `pzmap()`, möglich.

Pol-Nullstellen-Verteilung eines stabilen Regelkreises 3. Ordnung

$$G_w(s) = k \cdot \frac{1+sT_0}{(1+sT_1)(1+s2DT+s^2T^2)}$$

mit $D < 1$



Für **analytische Stabilitätsuntersuchungen** existieren einige Verfahren (Hurwitz, Nyquist u.a.), bei denen die Pole selbst nicht berechnet werden müssen.

4.7 Stabilitätsprüfung nach Hurwitz

Ein geschlossener Regelkreis ist stabil, wenn die **Pole** seiner s-Übertragungsfunktion **in der linken s-Halbebene** liegen.

Die praktische Anwendung dieser allgemeinen Stabilitätsbedingung scheitert allerdings daran, dass die Pole analytisch nur für Systeme 1. und 2. Ordnung berechnet werden können. Bei Systemen höherer Ordnungszahl ist die Berechnung allenfalls numerisch möglich.

→ Abhilfe: **Verfahren nach Hurwitz**

Ausgangspunkt: Charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises (Nenner der ÜF)

$$G_{W/V}(s) = \frac{\dots}{a_0 + s a_1 + s^2 a_2 + \dots + s^n a_n} \quad \text{dabei muss } a_n > 0 \text{ sein}$$

(gegebenenfalls Nenner (und Zähler) mit -1 multiplizieren)

Dieser Regelkreis ist **stabil nach Hurwitz**, wenn folgende $n-1$ Bedingungen erfüllt sind:

- Für alle n : $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \stackrel{!}{>} 0$ (Die Faktoren dürfen weder negativ noch 0 sein!)

Zusätzlich

- bei $n=1,2$: keine weitere Bedingung
- bei $n=3$: $a_1 a_2 - a_0 a_3 \stackrel{!}{>} 0$
- bei $n=4$: $a_1 a_2 - a_0 a_3 \stackrel{!}{>} 0$ UND $a_3 \cdot (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 \stackrel{!}{>} 0$
- bei $n \geq 5$: siehe Literatur

Die Ableitung der Bedingungen erfolgt rekursiv, Einzelheiten siehe Literatur und Anhang.

4.7 Stabilitätsprüfung nach Hurwitz

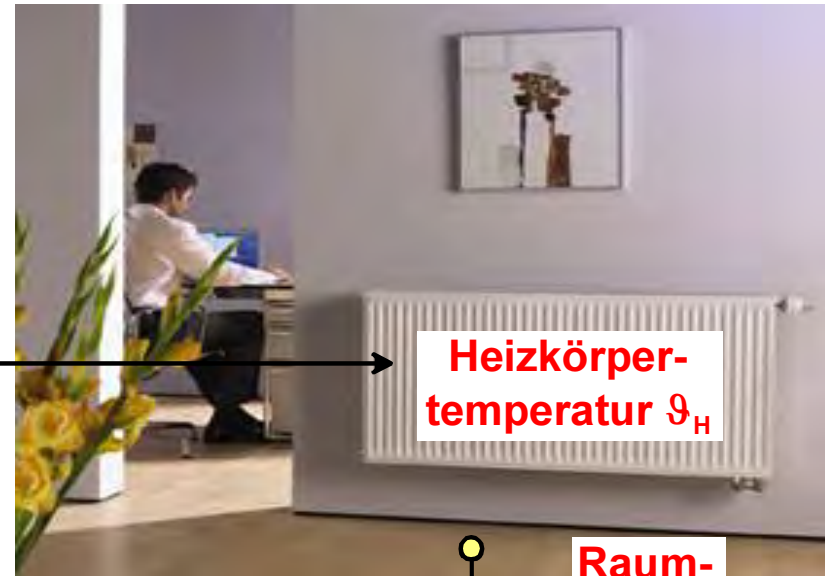
Anwendungsbeispiel Heizungsregelung

Solltemperatur

$\vartheta_{R\text{soll}}$

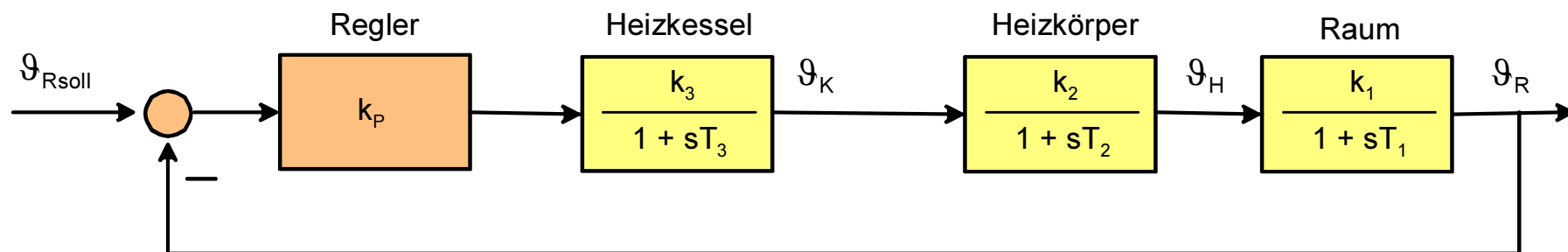


Kessel-
temperatur ϑ_K



Heizkörper-
temperatur ϑ_H

Raum-
temperatur ϑ_R



mit $k_1 k_2 k_3 = 2$, $T_3 = 2$ min, $T_2 = 5$ min, $T_1 = 20$ min

4.7 Stabilitätsprüfung nach Hurwitz

Führungsübertragungsfunktion

$$G_W(s) = \frac{\vartheta_R(s)}{\vartheta_{Rsoll}(s)} = \frac{k_p k_1 k_2 k_3}{\underbrace{k_p k_1 k_2 k_3 + 1}_{a_0} + s \underbrace{(T_1 + T_2 + T_3)}_{a_1} + s^2 \underbrace{(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)}_{a_2} + s^3 \underbrace{T_1 T_2 T_3}_{a_3}}$$

Für welche Werte von k_p ist der Regelkreis stabil?

→ Lösung mit Hurwitz-Stabilitätskriterium für $n = 3$

- 1. Bedingung: $a_0, a_1, \dots, a_n \stackrel{!}{>} 0$ erfüllt, wenn $k_p, k_1, k_2, k_3, T_1, T_2, T_3 > 0$ sind
- 2. Bedingung: $a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 \stackrel{!}{>} 0$

$$(T_1 + T_2 + T_3) \cdot (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) - (k_p k_1 k_2 k_3 + 1) \cdot T_1 T_2 T_3 \stackrel{!}{>} 0$$

$$\rightarrow k_p \stackrel{!}{<} \left[\frac{(T_1 + T_2 + T_3)(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)}{T_1 T_2 T_3} - 1 \right] \cdot \frac{1}{k_1 k_2 k_3} = 9,6 = k_{P,max}$$

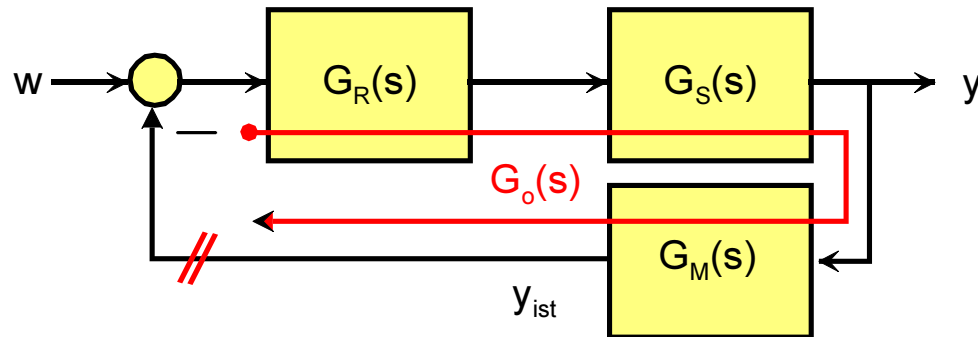
Bedeutung für Reglerentwurf: Regelkreis muss stabil sein → Stabilitätsbedingung legt $k_{P,max}$ fest (bei PID-Regler evtl. auch Bedingungen für T_n und T_v).

4.8 Stabilitätsprüfung nach Nyquist

Stabilitätsüberprüfung durch Berechnung der Pole bzw. nach Hurwitz ist

- nicht möglich, wenn die Übertragungsfunktion der Regelstrecke nicht bekannt ist oder die Regelstrecke Totzeiten enthält,
- schwer überschaubar, wenn die Stabilität von mehreren Strecken- und Reglerparametern abhängt,
- Das Hurwitz-Verfahren ist wenig aussagekräftig, wenn der Abstand von der Stabilitätsgrenze und das Zeitverhalten des geschlossenen Regelkreises vorhergesagt werden soll.

In diesen Fällen ist das **Frequenzkennlinienverfahren nach Nyquist** besser geeignet, **das auf dem berechneten oder gemessenen Frequenzgang des offenen Regelkreises beruht:**



Frequenzgang des offenen Regelkreises

$$\begin{aligned} G_o(s=j\omega) &= G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega) \cdot G_M(j\omega) \\ &= |G_o(j\omega)| \cdot e^{j \angle G_o(j\omega)} \end{aligned}$$

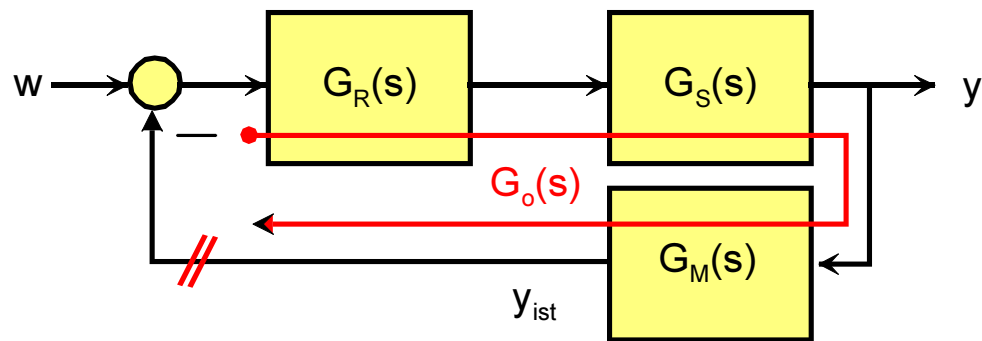
Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (jedes Signal läßt sich nach Fourier als Überlagerung von sinusförmigen Signalen darstellen) werden nur sinusförmige Signale betrachtet:

Der geschlossene **Regelkreis schwingt, wenn die Rückkopplung nicht als Gegenkopplung sondern als Mitkopplung wirkt.** Dies ist dann der Fall (*Schwingbedingung*), wenn es eine Frequenz ω_{krit} gibt, bei der

$$\angle G_o(j\omega_{krit}) = -180^\circ$$

und gleichzeitig $|G_o(j\omega_{krit})| \geq 1$ ist.

4.8 Stabilitätsprüfung nach Nyquist



Umgekehrt läßt sich daraus die folgende Stabilitätsbedingung ableiten:

Der **geschlossene Regelkreis** ist **stabil**, wenn **im offenen Regelkreis**

bei $\angle G_o(j\omega_{\text{krit}}) = -180^\circ \rightarrow |G_o(j\omega_{\text{krit}})| < 1$

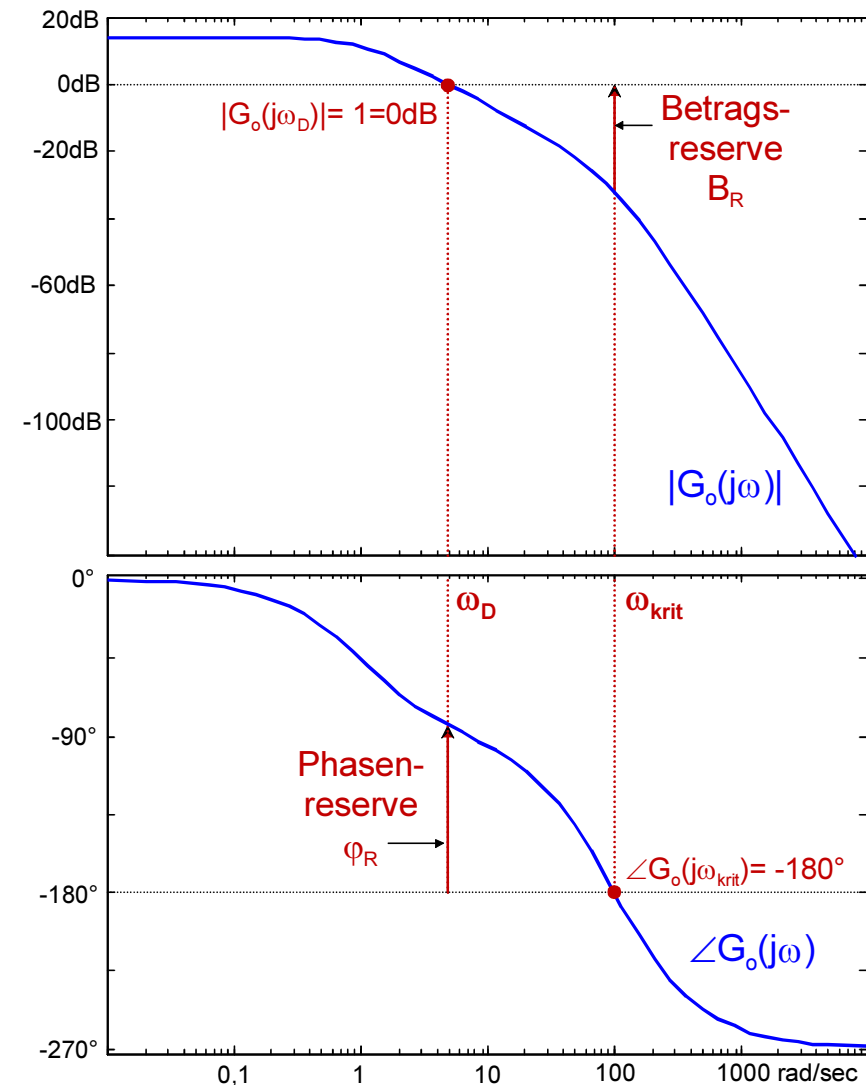
ist. Die Bedingung läßt sich auch folgendermassen formulieren: Stabilität, wenn

bei $|G_o(j\omega_D)| = 1 \rightarrow \angle G_o(j\omega_D) > -180^\circ$

bzw. wenn $\omega_D < \omega_{\text{krit}}$ ist.

dabei wird ω_{krit} als **kritische Kreisfrequenz** und ω_D als **Durchtrittskreisfrequenz** bezeichnet.

Beispiel: PT3-Strecke mit P-Regler



4.8 Stabilitätsprüfung nach Nyquist

Reale Regelkreise müssen einen **Sicherheitsabstand von der Stabilitätsgrenze** einhalten:

- **Betragsreserve** $B_R = \frac{1}{|G_o(\omega_{\text{krit}})|}$ stabil, wenn $B_R > 1$
typ. $B_R > 5 \dots 10$
- **Phasenreserve** $\varphi_R = \angle G_o(\omega_D) - (-180^\circ) = \angle G_o(\omega_D) + 180^\circ$ stabil, wenn $\varphi_R > 0$
in der Praxis Phasenreserve aussagefähiger typ. $\varphi_R \approx 30^\circ \dots 75^\circ$

Hinweise und Voraussetzungen der Nyquist-Stabilitätsprüfung:

- **Jede der drei Bedingungen** ist **hinreichend**, d.h. man verwendet diejenige Bedingung, die sich am einfachsten überprüfen lässt.
- Gelegentlich kommt es vor, dass **mehrere Durchtrittsfrequenzen** ω_D existieren; in diesem Fall darf die Bedingung bei ω_{krit} verwendet werden, wenn wenigstens ω_{krit} eindeutig ist. Falls umgekehrt **mehrere kritische Kreisfrequenzen** ω_{krit} existieren, darf die Bedingung bei ω_D verwendet werden, solange wenigstens ω_D eindeutig ist. Falls weder ω_D noch ω_{krit} eindeutig sind, muss die Ortskurve (siehe unten) betrachtet werden.
- Die **Nyquist-Bedingungen setzen voraus, dass** die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises **$G_o(s)$ keinen Pol in der rechten s-Halbebene und maximal zwei Pole auf der imaginären Achse** hat. Strecken mit Totzeit sind erlaubt. Falls diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, ist das Verfahren prinzipiell weiterhin anwendbar, die Bedingungen sind aber komplexer und lassen sich besser verstehen, wenn statt der Frequenzkennlinie (Betrag und Phase) die Ortskurve (Real- und Imaginärteil) von $G_o(j\omega)$ verwendet wird. Zu Details → Literatur.

4.8 Stabilitätsprüfung nach Nyquist

Ein instabiler Regelkreis kann stabilisiert bzw. die **Betrags- und Phasenreserve** eines stabilen Regelkreises **erhöht** werden, **indem**

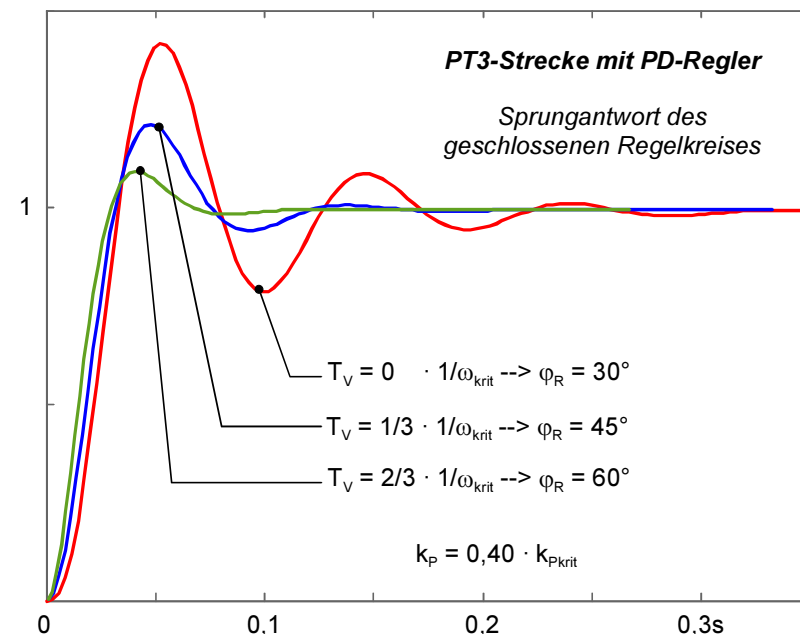
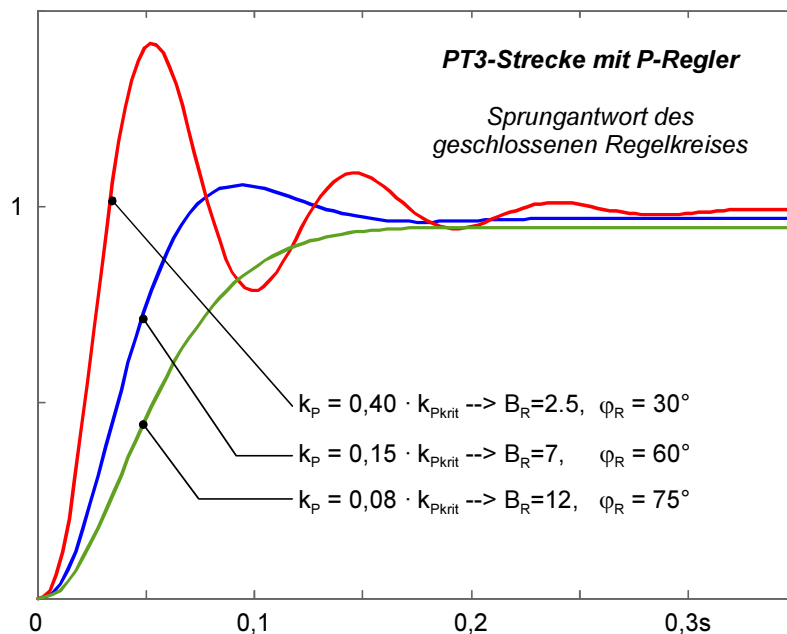
- die **Verstärkung k_p des Reglers reduziert** wird: $k_p \downarrow \rightarrow |G_o(\omega)| \downarrow \rightarrow B_R, \varphi_R \uparrow$

Nachteil: $\omega_D \downarrow \rightarrow$ Bandbreite des Regelkreises $\downarrow \rightarrow$ Regelkreis wird langsamer

Bleibende Regelabweichung \uparrow , falls kein I-Anteil vorhanden

- oder die **Phasennacheilung der Strecke durch eine Phasenvoreilung im Regler (D-Anteil)** im Bereich von ω_{krit} **verringert** wird: $\rightarrow \omega_{krit} \uparrow$ ω_D nicht langsamer

Nachteil: D-Anteil erhöht Verstärkung bei hohen Frequenzen, kritisch bei Rauschen und hochfrequenten Störungen, große Stellgrößen bei schnellen Sollwertänderungen



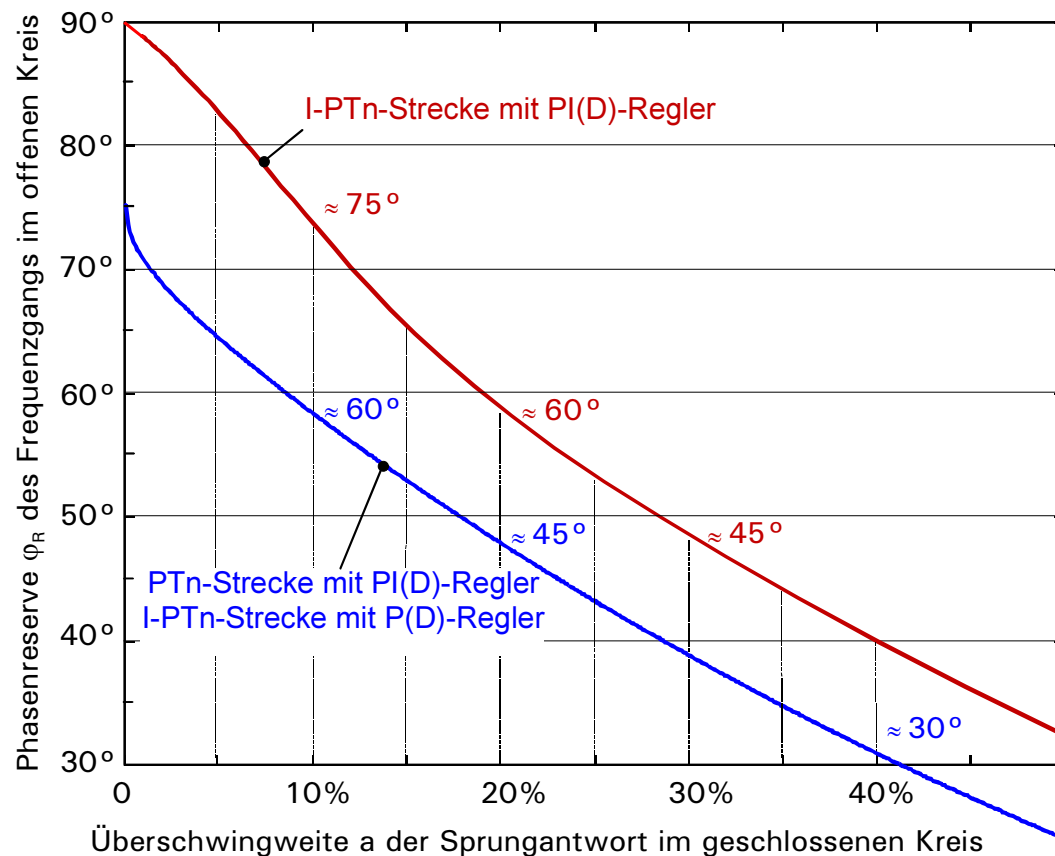
4.8 Stabilitätsprüfung nach Nyquist

Für die in der Praxis häufigen Sonderfälle

$$\text{PTn (gut bedämpft)} \quad G_S(s) = v \cdot \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2) \cdot \dots \cdot (1+sT_n)}$$

und

$$\text{I-PTn (gut bedämpft)} \quad G_S(s) = \frac{1}{sT_0} \cdot \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2) \cdot \dots \cdot (1+sT_n)}$$



kann sogar näherungsweise der direkte **Zusammenhang zwischen Frequenzgang des offenen Regelkreises $G_0(s)$ und Zeitverhalten der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises** angegeben werden:

- $a(\varphi_R)$ siehe Diagramm
- $T_{an} \approx \frac{1 \dots 2}{\omega_D}$
- $T_{aus} \approx (1 + 10 \cdot a) T_{an}$

Für $n=2$ können die Zusammenhänge aus Sprungantwort und Frequenzgang exakt berechnet werden. Für $n>2$ gelten sie näherungsweise, solange alle Pole des PTn-Glieds negativ reell sind [4.1 Kapitel 7.5].

4.9 Reglerauslegung mit Polkompensation und Phasenreserve

Auslegung eines PID-artigen Reglers

$$\text{PID-Regler } G_R(s) = k_p + \frac{k_I}{s} + s k_D = k_p \left\{ 1 + \frac{1}{sT_n} + s T_v \right\} = k_R \frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i}$$

$$\text{mit } k_p = k_R \frac{T_i + T_d}{T_i} \quad k_I = \frac{k_p}{T_n} = \frac{k_R}{T_i} \quad k_D = k_p T_v = k_R T_d$$

mit den Sonderfällen PI-Regler ($k_D=0$), PD-Regler ($k_I=0$) bzw. P-Regler

Forderungen:

- Regelkreis **soll** genau sein, d.h. bleibende Regelabweichung $e(t \rightarrow \infty) < \dots\% \cdot w(t \rightarrow \infty)$
- Regelkreis **muss** stabil und gut gedämpft sein, d.h. Überschwingen Sprungantwort $a < \dots\%$
- Regelkreis **soll** schnell einschwingen, d.h. Ziele für T_{an} bzw. T_{aus}

Festzulegen sind die Verstärkung k_R und die Zeitkonstanten T_i und T_d

- Schritt 0: Entscheidung, ob I-Anteil im Regler notwendig ist
 - hängt von der zulässigen bleibenden Regelabweichung ab (siehe Kap. 4.2)
- Schritt 1: Festlegung der Reglerzeitkonstanten T_i und T_d
 - **Verfahren der Polkompensation** siehe S. 4.30
- Schritt 2: Festlegung der Reglerverstärkung k_R
 - Umwandeln der Anforderung an a in eine Anforderung an φ_R (siehe S. 4.28)
Verfahren der Phasenreserve siehe S. 4.31

4.9 Reglerauslegung mit Polkompensation und Phasenreserve

Pol- Nullstellen-Kompensation (Polkompensation)

Die meisten Regelstrecken haben – zumindest bei höheren Frequenzen – Tiefpassverhalten

$$G_S(s) = \frac{\dots}{\dots (1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3) \dots} \quad \text{mit } T_1 > T_2 > T_3 > \dots$$

Die **Ordnungszahl des Regelkreises** und damit die **Phasennacheilung** bei höheren Frequenzen (und mögliche Stabilitätsprobleme) **können verringert werden**, wenn **Pole der Regelstrecke durch Nullstellen im Regler kompensiert** werden. Im offenen Regelkreis gilt:

$$G_O(s) = G_R(s) G_S(s) G_M(s) = k_R \frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i} \cdot \frac{\dots}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3) \dots} \cdot G_M(s)$$

wenn $T_i=T_1$ und $T_d=T_2$:

$$= k_R \frac{1}{sT_1} \cdot \frac{\dots}{(1+sT_3) \dots} \cdot G_M(s)$$

- **Mit dem I-Anteil** (T_i) kompensiert man üblicherweise die **größte Streckenzeitkonstante T_1** , **mit dem D-Anteil** (T_d) die **zweitgrößte Streckenzeitkonstante T_2** (auch bei PD-Reglern!)
- **Wenn die Strecke einen Pol bei $s=0$ hat**, darf **mit dem I-Anteil** in der Regel **keine Polkompensation** erfolgen, sonst kann der Regelkreis instabil werden:

$$G_O(s) = G_R(s) G_S(s) G_M(s) = k_R \frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i} \cdot \frac{\dots}{sT_0(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3) \dots} \cdot G_M(s)$$

wenn $T_i=T_1$ und $T_d=T_2$:

$$= k_R \frac{1}{sT_i} \cdot \frac{\dots}{sT_0(1+sT_3) \dots} \cdot G_M(s)$$

Im offenen Regelkreis würden zwei I-Glieder in Reihe liegen, d.h. die Phasennacheilung wäre min. 180°, die Verstärkung bei niedrigen Frequenzen $\gg 1$ und damit wäre der geschlossene Regelkreis instabil. Vgl. Hurwitz-Kriterium.

4.9 Reglerauslegung mit Polkompensation und Phasenreserve

Beispiel 1

Für die PT4-Regelstrecke, deren Betragsfrequenzgang auf der folgenden Seite abgebildet ist, soll ein PID-Regler so ausgelegt werden, dass die Überschwingweite im geschlossenen Regelkreis $a < 10\%$ wird.

- Schritt 1: Polkompensation möglich, gewählt $T_i = T_1 = 1 \text{ sec}$ $T_d = T_2 = 0,5 \text{ sec}$
- Schritt 2: $a < 10\% \rightarrow$ Diagramm S. 4.28 für PTn-Strecken \rightarrow Phasenreserve $\varphi_R \geq 60^\circ$

➤ Rest-Regelkreis nach Polkompensation:

$$G_o(s) = k_R \frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i} \cdot \frac{10}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)(1+sT_4)} = k_R \frac{1}{sT_1} \cdot \frac{10}{(1+sT_3)(1+sT_4)}$$

➤ Frequenzkennlinien des offenen Regelkreises für $k_{R,\text{Zeichnung}} = 1$ sh. Zeichnung:

$$\omega_{\varphi_R} = 5 \text{ rad/sec} \quad |G_o(\omega_{\varphi_R})| = 2$$

$$\rightarrow \text{Endgültige Reglerverstärkung} \quad k_R = \frac{k_{R,\text{Zeichnung}}}{|G_o(\omega_{\varphi_R})|} = \frac{1}{2}$$

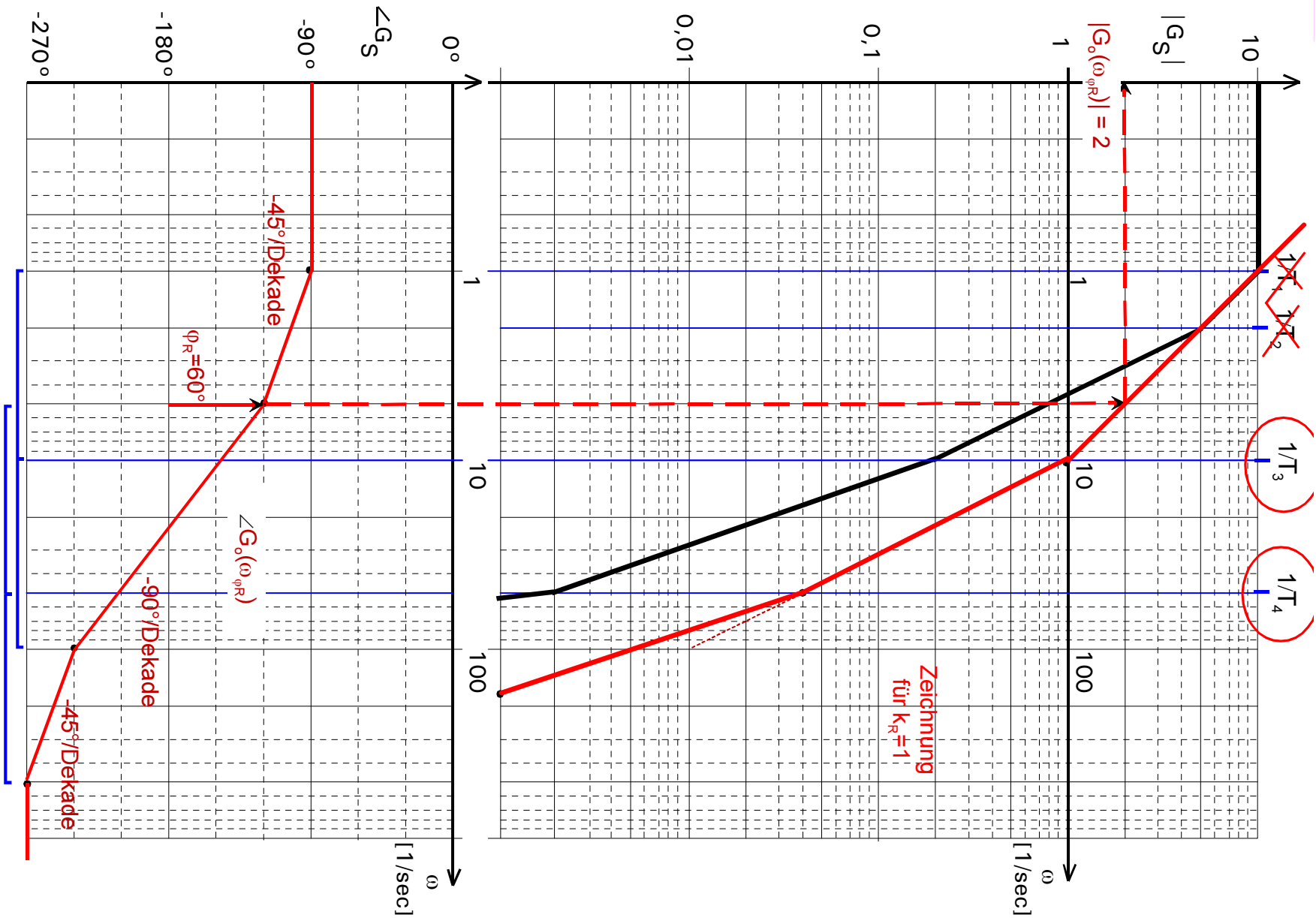
- Schritt 3: Schätzwerte für Einschwingdauer des geschlossenen Regelkreises

$$\text{Anregelzeit} \quad T_{\text{an}} \approx \frac{1 \dots 2}{\omega_D} = \frac{1 \dots 2}{\omega_{\varphi_R}} = 0,2 \dots 0,4 \text{ sec}$$

$$\text{Ausregelzeit} \quad T_{\text{aus}} \approx (1+10 \cdot a) T_{\text{an}} = (1+10 \cdot 0,1) T_{\text{an}} = 2 T_{\text{an}}$$

4.9 Reglerauslegung mit Polkompensation und Phasenreserve

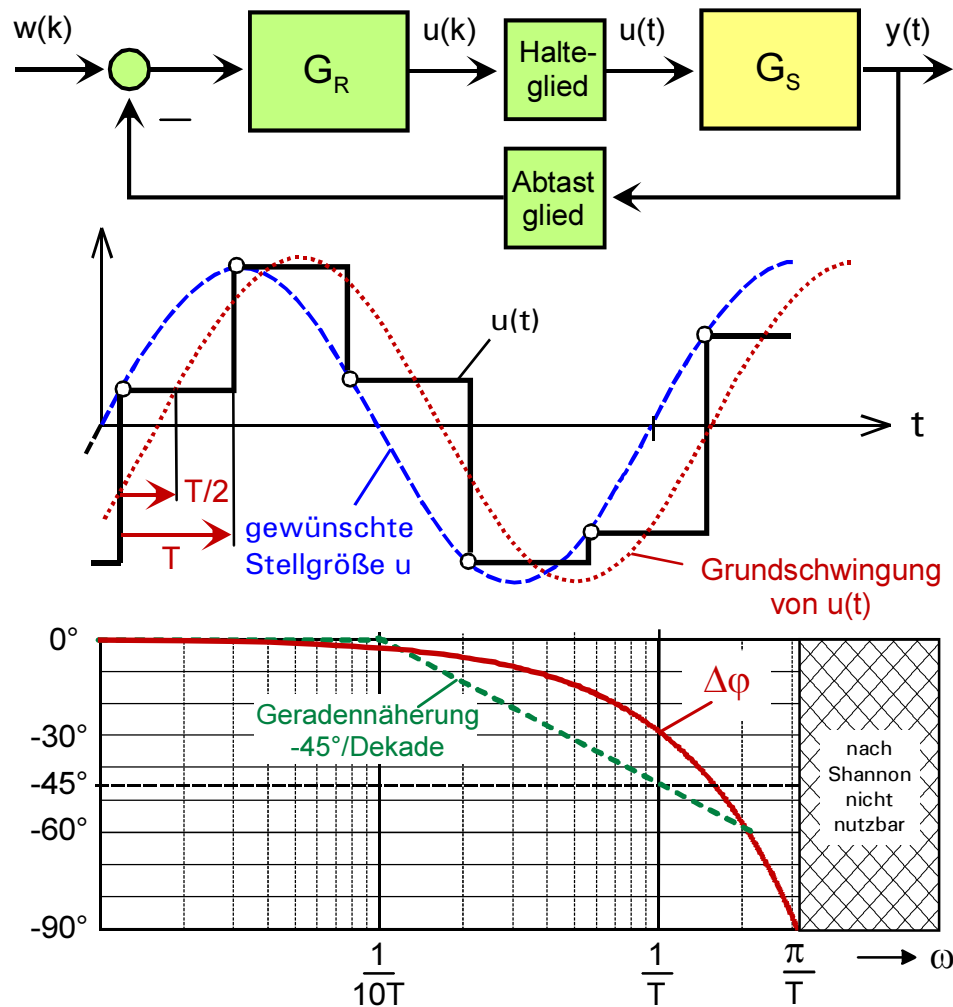
Frequenzkennlinie zu Beispiel 1



4.9 Reglerauslegung mit Polkompensation und Phasenreserve

Erweiterung für zeitdiskrete PID-Regler

Das Auslegungsverfahren mit Polkompensation und Phasenreserve kann auch für zeitdiskrete PID-artige Regler eingesetzt werden.



Der **Abtast- und Haltevorgang wirkt** im Zeitbereich **wie eine Verzögerung** (Totzeit) um $T/2$, im Frequenzbereich wie eine **zusätzliche Phasennacheilung**

$$\Delta\phi = -\omega T/2$$

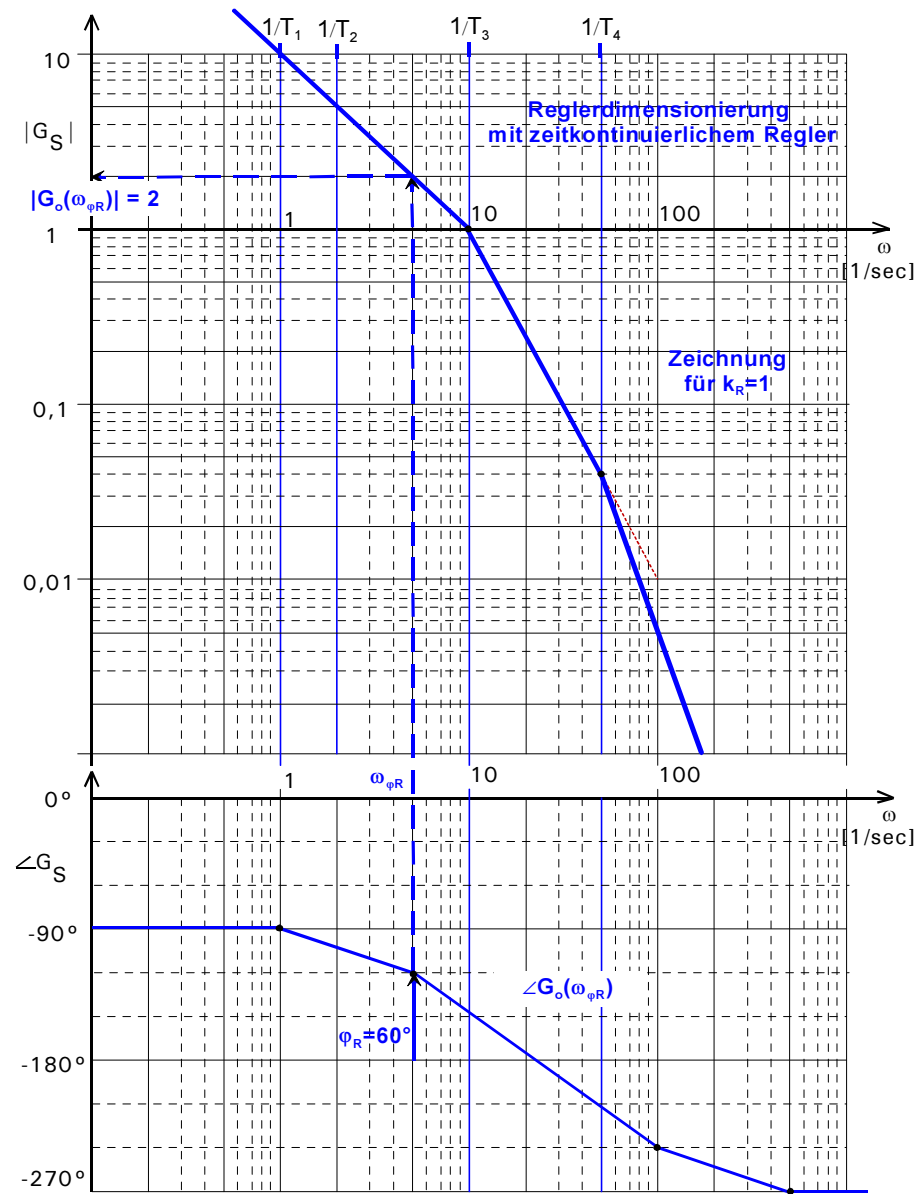
Legt man einen Regler mit dem Verfahren der Phasenreserve aus, kann man diese zusätzliche Phasennacheilung im Frequenzgang $G_o(j\omega)$ berücksichtigen, falls T bereits festliegt. Tut man dies nicht, **verringert** sich die **tatsächliche Phasenreserve um**

$$|\Delta\phi_R| = \omega_{\phi_R} T/2$$

Umgekehrt kann man $|\Delta\phi_R|$ vorgeben, z.B. $|\Delta\phi_R| < \phi_R/10$, und daraus die maximal zulässige Abtastzeit T bestimmen

$$T < 2 \cdot |\Delta\phi_R| / \omega_{\phi_R}$$

4.9 Reglerauslegung mit Polkompensation und Phasenreserve



Fortsetzung Beispiel 1:

Der oben dimensionierte PID-Regler soll zeitdiskret implementiert werden. Bei welcher Abtastzeit würde der Regelkreis instabil?

Theoretisch stabil, solange die Phasenreserve ϕ_R ohne Abtastung durch die Abtastung nicht vollständig verloren geht, d.h. wenn

$$|\Delta\phi_R| = \omega_{\phi R} \cdot \frac{T}{2} < 60^\circ \text{ ist}$$

$$\rightarrow T < \frac{2 \phi_R}{\omega_{\phi R}} = \frac{2 \cdot 60^\circ \cdot \pi / 180^\circ}{5 \text{ rad/sec}} = 420 \text{ msec}$$

In der Praxis ist ein großer Sicherheitsabstand nötig. Fordert man z.B., dass die Phasenreserve durch die Abtastung nur um max.

$$|\Delta\phi_R| < \phi_R / 10 = 60^\circ / 10 = 6^\circ$$

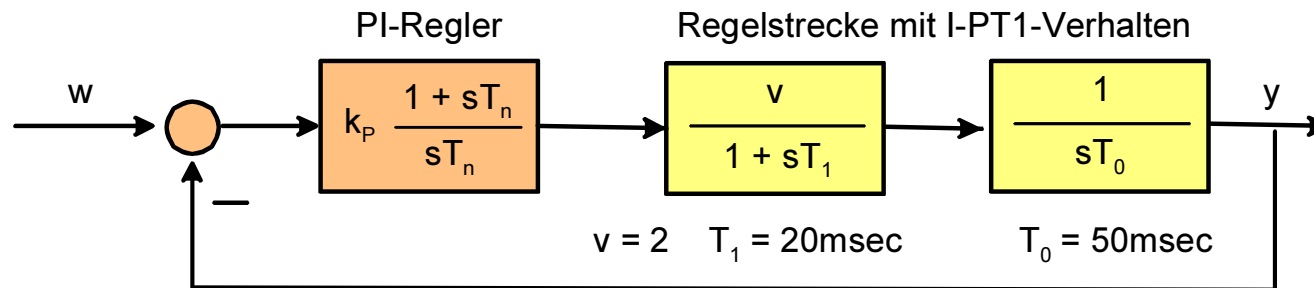
kleiner werden darf, ergibt sich

$$\rightarrow T < \frac{2 |\Delta\phi_R|}{\omega_{\phi R}} = \frac{2 \cdot 6^\circ \cdot \pi / 180^\circ}{5 \text{ rad/sec}} = 42 \text{ msec}$$

4.9 Reglerauslegung mit Polkompensation und Phasenreserve

Vorgehen, wenn mit dem I-Anteil des Reglers keine Polkompensation möglich ist:

Beispiel 2:



Ziel: Überschwingweite $a < 30\%$ → Diagramm S. 4.28 für IPTn-Strecken → $\varphi_R \geq 45^\circ$

Schritt 1: Polkompensation mit I-Anteil nicht möglich, da Regelkreis sonst instabil → $T_n = ?$

Schritt 2: I-Anteil des Reglers zunächst weglassen, d.h. Auslegung mit reinem P-Regler
(oder PD-Regler, falls PID-Regler eingesetzt werden soll)

(Rest)-Regelkreis:
$$G_o(s) = k_p \cdot \frac{v}{sT_0 \cdot (1 + sT_1)}$$

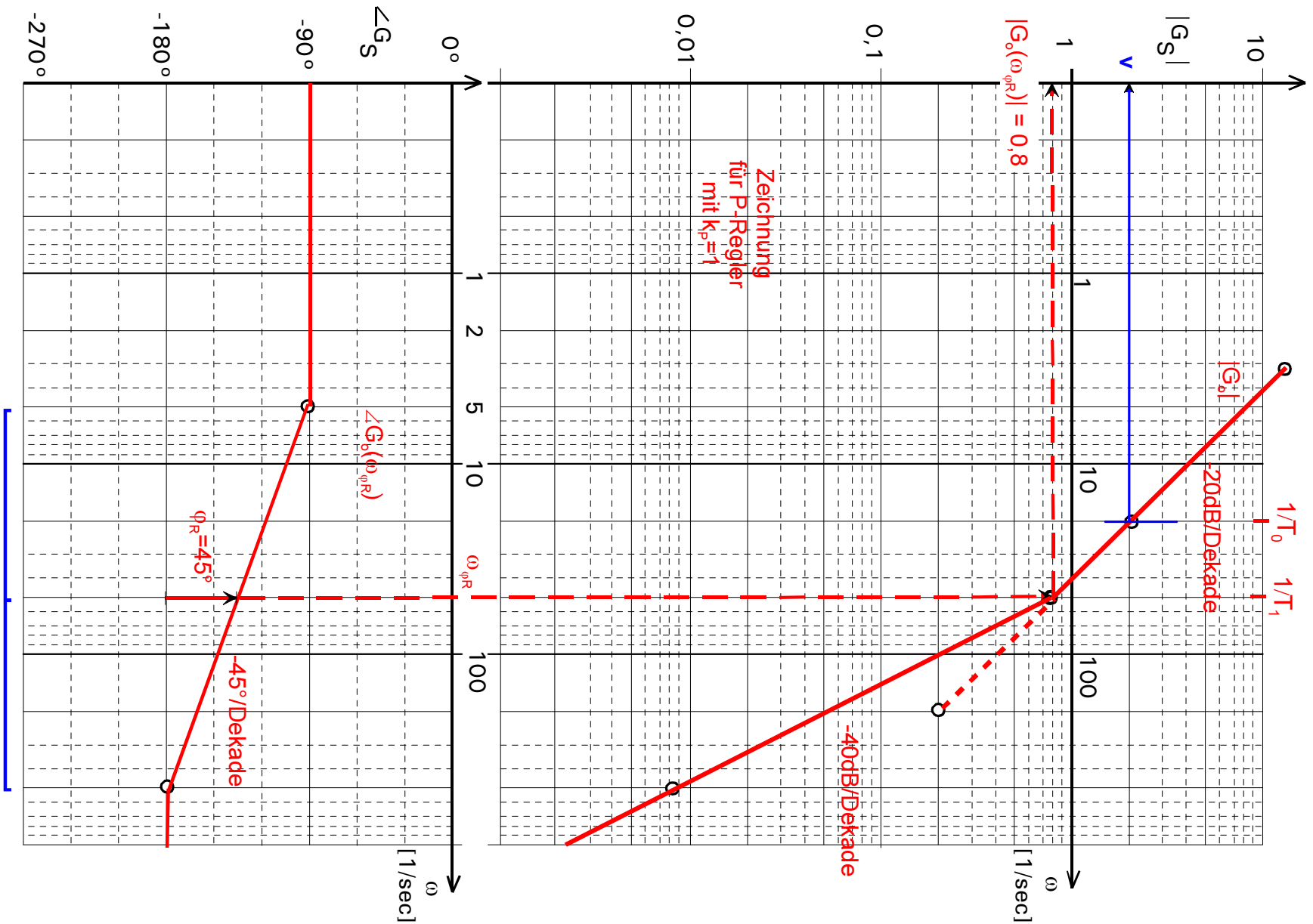
Frequenzkennlinien des offenen Regelkreises für $k_{p, \text{Zeichnung}} = 1$ sh. Zeichnung:

$$\omega_{\varphi R} = 50 \text{ rad/sec} \quad |G_o(\omega_{\varphi R})| = 0,8$$

→ Endgültige Reglerverstärkung
$$k_p = \frac{k_{p, \text{Zeichnung}}}{|G_o(\omega_{\varphi R})|} = \frac{1}{0,8} = 1,25$$

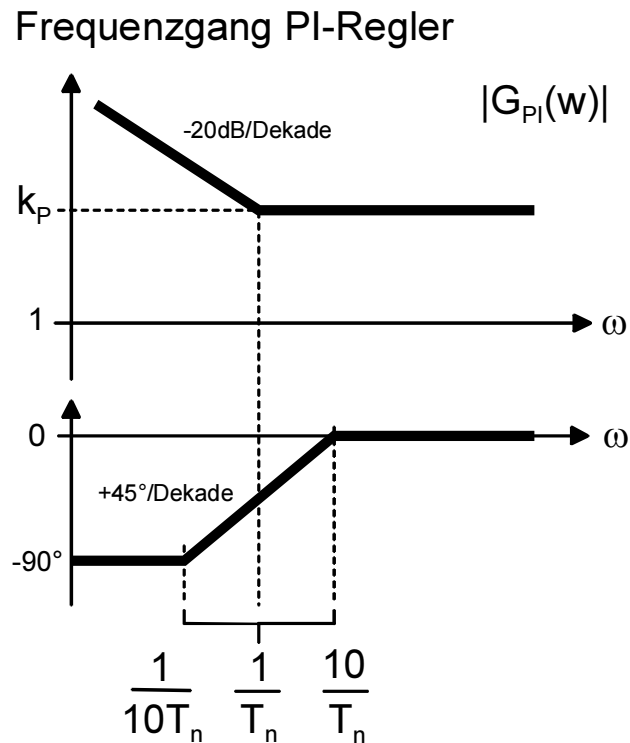
4.9 Reglerauslegung mit Polkompensation und Phasenreserve

Frequenzkennlinie zu Beispiel 2



4.9 Reglerauslegung mit Polkompensation und Phasenreserve

Schritt 2a: I-Anteil des Reglers nachträglich so dimensionieren, dass sich die Phasenreserve und damit die Reglerverstärkung k_p aus Schritt 2 nicht ändern



Bei hohen Frequenzen verhält sich der PI-Regler wie ein reiner P-Regler

Bei niedrigen Frequenzen verursacht der PI-Regler eine zusätzliche Phasennacheilung im Regelkreis

Die Phasenreserve bei $\omega_{\varphi R}$ aus Schritt 2 bleibt unverändert (d.h. wird nicht verringert),

solange $\frac{10}{T_n} < \omega_{\varphi R}$

$$\rightarrow T_n > \frac{10}{\omega_{\varphi R}} = \frac{10}{50 \text{ rad/sec}} = 200 \text{ msec}$$

Abschätzungen Einschwingdauer

$$T_{an} = 1..2/\omega_{\varphi R} = 1..2/50 \text{ rad/sec} = 20 \dots 40 \text{ msec}$$

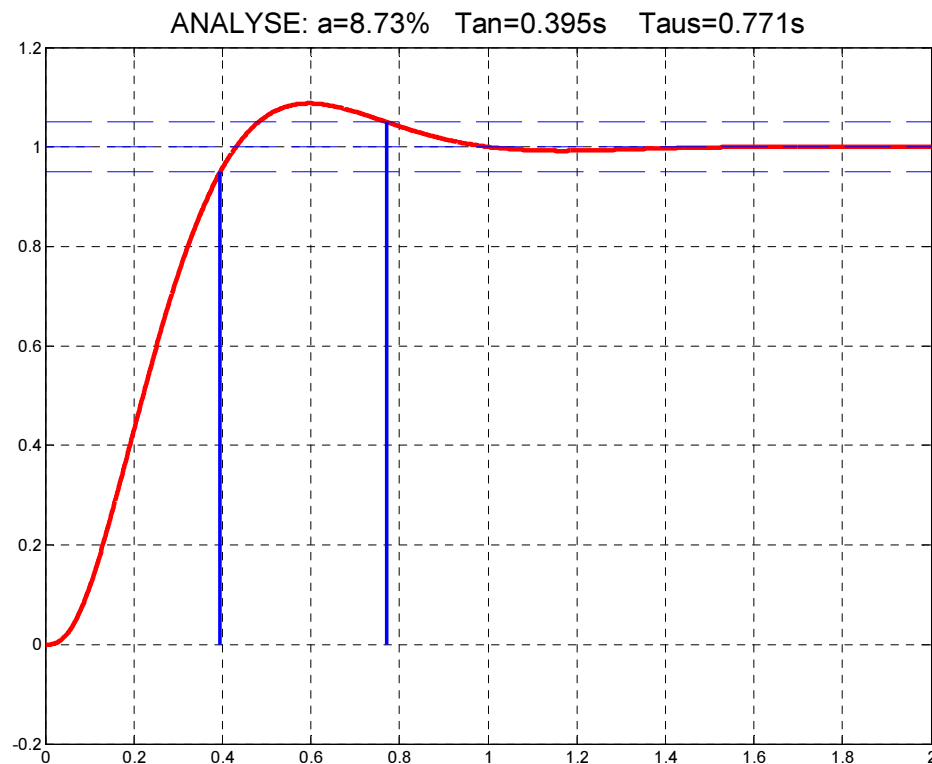
$$T_{aus} = (1+10 \cdot a) T_{aus} = (1+10 \cdot 0,3) T_{an} = 80 \dots 160 \text{ msec}$$

4.9 Reglerauslegung mit Polkompensation und Phasenreserve

Sprungantworten der geschlossenen Regelkreise

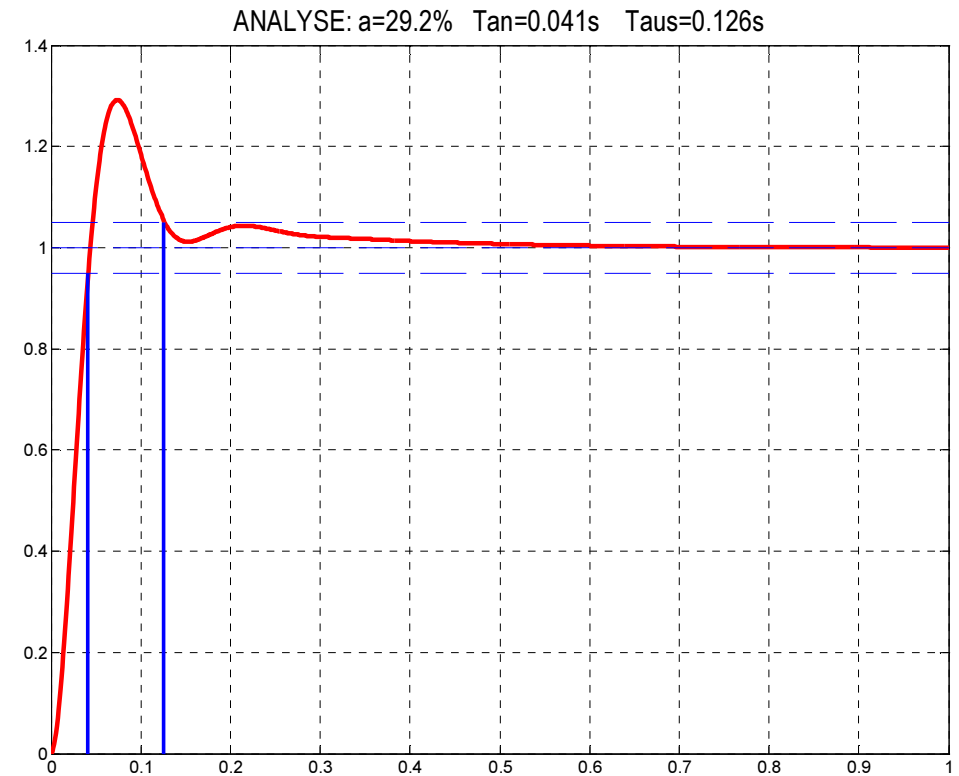
Beispiel 1

PID-Regler mit $k_R=0.5$ $T_i=1\text{sec}$ $T_n=0,5\text{sec}$



Beispiel 2

PI-Regler mit $k_P=1.25$ $T_n=0,2\text{sec}$



4.9 Reglerauslegung mit Polkompensation und Phasenreserve

Bemerkung für Experten: Phasenreserve und Einschwingdauer

Die Ausregelzeit eines Regelkreises bei Auslegung mit Phasenreserve lässt sich nach Seite 4.28 folgendermaßen abschätzen:

$$T_{\text{aus}} \approx (1+10 \cdot a) T_{\text{an}} \approx (1+10 \cdot a) \frac{1 \dots 2}{\omega_D} \approx (1+10 \cdot a) \frac{1 \dots 2}{\omega_{\varphi_R}} \approx (1 \dots 2) \cdot \frac{1+10 \cdot a}{\omega_{\varphi_R}}$$

Dabei sind a und ω_{φ_R} von der Phasenreserve abhängig. Verringert man die Phasenreserve φ_R ,

- steigt die Überschwingweite:
(siehe Diagramm $a(\varphi_R)$ auf Seite 4.28)

$$\varphi_R \downarrow \rightarrow a(\varphi_R) \uparrow$$

- Gleichzeitig steigt aber auch ω_{φ_R} :

$$\varphi_R \downarrow \rightarrow \omega_{\varphi_R}(\varphi_R) \uparrow$$

(Da die Phasenkurve $\angle G_o(\omega)$ des offenen Regelkreises im Bereich um ω_{φ_R} mit zunehmender Frequenz ω in der Regel fällt, siehe Diagramm auf Seite 4.25).

Insgesamt gilt also:

$$\varphi_R \downarrow \rightarrow T_{\text{aus}} \approx (1 \dots 2) \cdot \frac{1+10 \cdot a(\varphi_R) \uparrow}{\omega_{\varphi_R}(\varphi_R) \uparrow}$$

Ob sich die Ausregelzeit dabei wesentlich ändert, hängt davon ab, ob sich der Term im Zähler und im Nenner unterschiedlich stark ändern. Aus den Diagrammen auf den Seiten 4.28 und 4.25 kann man im Bereich $a = 0 \dots 30\%$ folgendes abschätzen:

- Fällt die Phasenkurve des offenen Regelkreises im Bereich um ω_{φ_R} mit $-45^\circ/\text{Dekade}$, so kann man T_{aus} auf etwa $2/3$ reduzieren, wenn man φ_R verringert (d.h. größeres Überschwingen).
- Fällt die Phasenkurve im Bereich um ω_{φ_R} dagegen mit $-90^\circ/\text{Dekade}$, steigt T_{aus} auf etwa das 1,5 fache, d.h. der Regelkreis wird langsamer (da a stärker wächst als ω_{φ_R}).

4.9 Reglerauslegung mit Polkompensation und Phasenreserve

Zusammenfassung der Vorgehensweise bei der Auslegung PID-artiger Regler:

Schritt 0:

- Vorgabe der gewünschten Phasenreserve φ_R (z.B. über die zulässige Überschwingweite nach S. 4.28)

Schritt 1:

- Festlegung der Reglerzeitkonstanten T_i, T_d nach Polkompensation (soweit möglich, siehe S. 4.30).

Schritt 2:

- Zeichnen der Frequenzkennlinien des Rest-Regelkreises $G_o(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)$ **nach** der Pol-Nullstellen-Kompensation. Für die noch unbekannte Reglerverstärkung k_R wird ein willkürlicher Wert angesetzt, z.B. $k_{R, \text{Zeichnung}} = 1$. Falls die Zeitkonstante T_i nicht durch Polkompensation festgelegt werden konnte, wird der I-Anteil im Regler zunächst weggelassen.
- In der Zeichnung wird die Kreisfrequenz $\omega_{\varphi R}$ ermittelt, bei der die gewünschte Phasenreserve $-180^\circ + \varphi_R = \angle G_o(\omega_{\varphi R})$ vorhanden ist und die zugehörige Verstärkung $|G_o(\omega_{\varphi R})|$ abgelesen.
- Endgültige Reglerverstärkung $k_R = \frac{k_{R, \text{Zeichnung}}}{|G_o(\omega_{\varphi R})|}$, endgültige Durchtrittsfrequenz $\omega_D = \omega_{\varphi R}$

Schritt 2a:

- Falls mit dem I-Anteil des Reglers keine Polkompensation möglich war: $T_i = \frac{1}{\omega_{\varphi R}/10}$

Schritt 3 (optional):

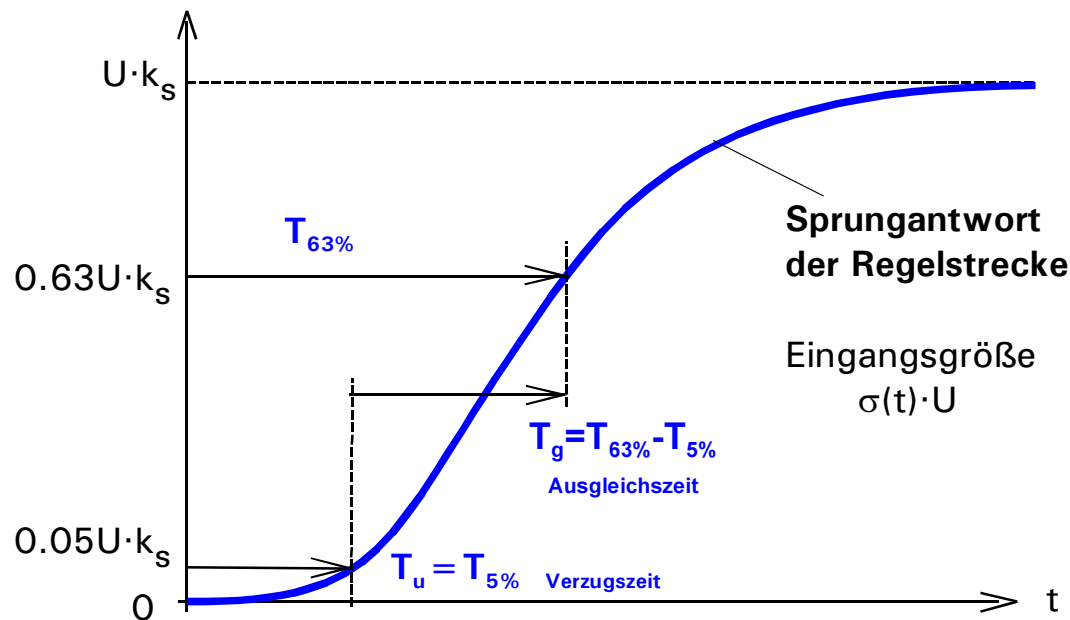
- Abschätzung der An- und Ausregelzeiten $T_{\text{an}} \approx \frac{1 \dots 2}{\omega_{\varphi R}}$ $T_{\text{aus}} \approx (1 + 10 \cdot a) T_{\text{an}}$

4.10 Wahl der Reglerparameter nach Erfahrungsregeln

In vielen praktischen Fällen müssen Regler experimentell eingestellt werden, weil Blockschaltbild, Übertragungsfunktion und Parameter der Regelstrecke nicht vollständig bekannt sind oder weil nicht genügend Zeit für eine fundierte Reglerauslegung bleibt.

Für die experimentelle Reglereinstellung existieren sehr viele Verfahren, die alle jeweils nur bei ganz bestimmten Regelstrecken anwendbar sind. Die bekanntesten dieser **Verfahren** basieren auf einer Messung der Sprungantwort und sind **nur anwendbar für Regelstrecken mit Ausgleich und guter Dämpfung**, d.h.

- Regelstrecke mit S-förmiger Sprungantwort ohne nennenswertes Überschwingen



Falls die Übertragungsfunktion bekannt ist

$$G_S(s) = v \cdot \frac{(1+sT_{z1})(1+sT_{z2})\dots(1+sT_{zm})}{(1+sT_1)(1+sT_2)\dots(1+sT_n)} e^{-sT_d}$$

(dabei muss sein $m < n$ und $T_{z1} + \dots + T_{zn} < T_1 + \dots + T_n$, $T_d = 0$ ist zulässig)

gilt näherungsweise:

$$T_{63\%} \approx T_1 + \dots + T_n - (T_{z1} + \dots + T_{zm}) + T_d$$

Bei zeitdiskreten Reglern verwendet man

$$T_u = T_{5\%} + \frac{T}{2}$$

und berücksichtigt damit auch gleich die zusätzliche Verzögerung durch die Abtastung

4.10 Wahl der Reglerparameter nach Erfahrungsregeln

Reglereinstellung nach Chien, Hrones und Reswick

Wahl des Regler-Typs:

Empirisch wurde beobachtet, dass eine Strecke umso schlechter zu regeln ist, je ausgeprägter das Totzeit-ähnliche Verhalten ist, d.h. je größer T_u / T_g ist.

T_u / T_g	Beurteilung	Empfohlener Regler
$< 0,2$	gut regelbar	PI
$0,2 \dots 0,5$	noch regelbar	PID
$> 0,5$	schlecht regelbar	Kaskade

Wahl der Reglerparameter:

Dabei wird unterschieden, ob das Führungs- oder das Störverhalten des Regelkreises optimiert werden soll und wieviel Überschwingen zulässig ist:

Regler optimiert		... für Führungsverhalten		... für Störverhalten	
Überschwingen		kein	20%	kein	20%
P-Regler	k_p	$0,3 \frac{T_g}{T_u \cdot k_S}$	$0,7 \frac{T_g}{T_u \cdot k_S}$	$0,3 \frac{T_g}{T_u \cdot k_S}$	$0,7 \frac{T_g}{T_u \cdot k_S}$
PI-Regler	k_p	$0,4 \frac{T_g}{T_u \cdot k_S}$	$0,6 \frac{T_g}{T_u \cdot k_S}$	$0,6 \frac{T_g}{T_u \cdot k_S}$	$0,7 \frac{T_g}{T_u \cdot k_S}$
	T_n	$1,2 T_g$	T_g	$4 T_u$	$2,3 T_u$
PID-Regler	K_p	$0,6 \frac{T_g}{T_u \cdot k_S}$	$\frac{T_g}{T_u \cdot k_S}$	$\frac{T_g}{T_u \cdot k_S}$	$1,2 \frac{T_g}{T_u \cdot k_S}$
	T_n	T_g	$1,4 T_g$	$2,4 T_u$	$2 T_u$
	T_v	$0,5 T_u$	$0,5 T_u$	$0,4 T_u$	$0,4 T_u$

In der Literatur werden T_u, T_g häufig anders definiert (z.B. mit Hilfe einer Wendetangente), so dass sich dort abweichende Werte ergeben können.

Soll eine Überschwingweite $a \neq 20\%$ eingestellt werden, wird zwischen den Reglerparametern für aperiodischen Regelverlauf und denjenigen für 20% Überschwingen interpoliert.

4.10 Wahl der Reglerparameter nach Erfahrungsregeln

Reglereinstellung nach Ziegler-Nichols

- Als **Regler** wird **zunächst** ein **P-Regler** eingesetzt, k_p auf einen kleinen Wert eingestellt und damit der geschlossene Regelkreis in Betrieb genommen.
- Die **Reglerverstärkung** k_p wird **solange erhöht, bis** der geschlossene **Regelkreis schwingt**. Die Reglerverstärkung $k_p = k_{pkrit}$ an der Stabilitätsgrenze und die Periodendauer T_{krit} der Dauerschwingung werden gemessen.
- Für die **eigentliche Reglereinstellung** muss ein Sicherheitsabstand von dieser Stabilitätsgrenze eingehalten werden. Ziegler und Nichols schlagen vor, eine (Betrags)-Reserve von ungefähr dem Faktor 2 einzustellen und die Zeitkonstante(n) des Reglers kleiner (d.h. den Regler schneller) zu machen als die Periodendauer der Schwingung. Abhängig davon, welcher Reglertyp gewählt wird, empfehlen Sie folgende Einstellungen:

Reglertyp	k_p	T_n	T_v
P	$0,5 \cdot k_{pkrit}$		
PI	$0,4 \cdot k_{pkrit}$	$0,8 \cdot T_{krit}$	
PID	$0,6 \cdot k_{pkrit}$	$0,5 \cdot T_{krit}$	$0,1 \cdot T_{krit}$

In der Praxis erweist sich die Betragsreserve von nur 2 bei Führungsregelungen als unzureichend. Der so eingestellte Regelkreis hat ein sehr gutes Störverhalten, bei einem Sprung der Führungsgröße dagegen entsteht ein Überschwingen von mehr als 40%. Das Verfahren von Ziegler-Nichols sollte daher nur bei Festwertregelungen eingesetzt werden. Bei Führungsregelungen sollte man die Betragsreserve deutlich größer wählen, z.B. 10.

Statt k_{pkrit} und $T_{krit} = 2\pi/\omega_{krit}$ experimentell zu ermitteln, kann man die Werte auch aus den Nyquist-Frequenzkennlinien bestimmen.

4.10 Wahl der Reglerparameter nach Erfahrungsregeln

Die Verfahren von Chien u.a. bzw. Ziegler-Nichols gehören zu den ältesten Einstellregeln und sind immer noch weit verbreitet. Das Regelverhalten solcher Regelungen ist allerdings nicht besonders gut. Daher existieren viele neuere empirische Einstellregeln.

Reglereinstellung mit dem Summenzeitkonstanten-Verfahren nach Kuhn

- Wird ähnlich angewendet wie die Regeln von Chien u.a., unterscheidet aber nicht nach Führungs- oder Störverhalten.
- Der Regelkreis wird langsamer einschwingen als bei Chien u.a. bzw. Ziegler-Nichols, ist aber deutlich besser gedämpft und bleibt damit auch eher stabil, wenn sich die Parameter der Regelstrecke stärker ändern.

Reglertyp	k_p	T_n	T_v
P	$1 / k_S$	-	-
PD	$1 / k_S$	-	$T_{63\%} / 3$
PI	$1 / 2k_S$	$T_{63\%} / 2$	-
PID	$1 / k_S$	$2T_{63\%} / 3$	$T_{63\%} / 6$

Der geschlossene Regelkreis hat dann eine Sprungantwort mit ca. 5 ... 10% Überschwingen

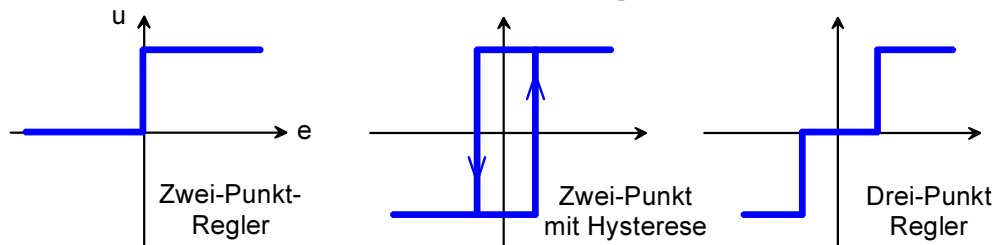
4.11 Nichtlineare Elemente: Schaltende Regler, Begrenzungen, Wind-Up-Effekte

Sobald **Nichtlinearitäten** im Regelkreis auftreten, ist die Beschreibung durch Übertragungsfunktionen nicht mehr möglich, da die Laplace-Transformation das Überlagerungsprinzip voraussetzt, das nur bei linearen Systemen gilt.

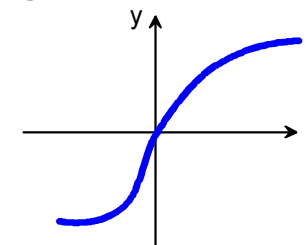
Die häufigsten Nichtlinearitäten sind

- **Schaltende Regler** → Behandlung praktisch nur im Zeitbereich möglich (nächste Seite)
- **Begrenzungen** im Stellglied → kommen praktisch in jedem Regelkreis vor
- **Stetig differenzierbare Nichtlinearitäten** → können durch **Linearisierung** in einem begrenzten Bereich angenähert werden
- **Wesentliche Nichtlinearitäten** wie Stick-Slip-Effekte (Haft/Gleitreibung), Hysterese, Spiel, Totzonen oder Minimal- oder Maximalwertauswahl → siehe Regelungstechnik 2

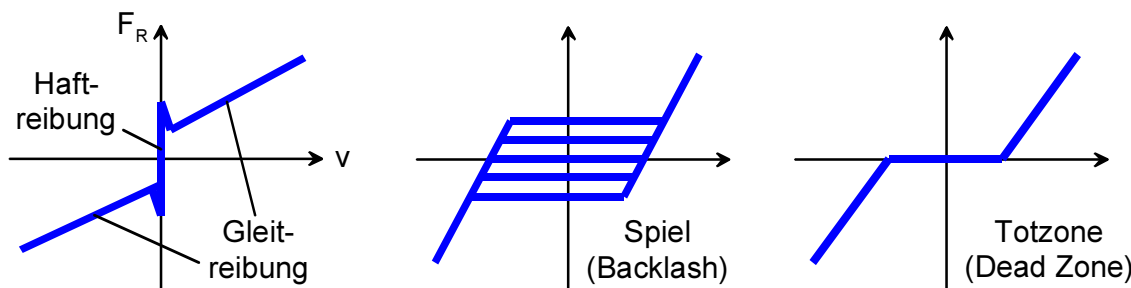
Schaltende Regler



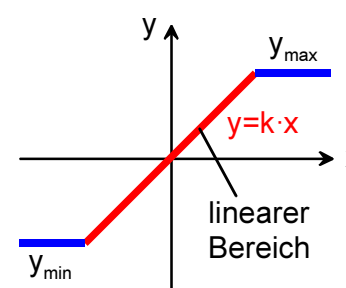
Stetige Nichtlinearitäten



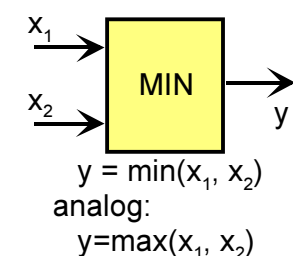
Wesentliche Nichtlinearitäten



Begrenzungen



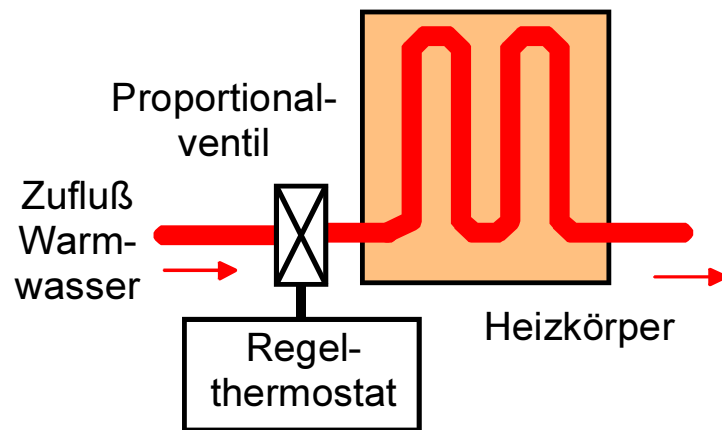
Min / Max



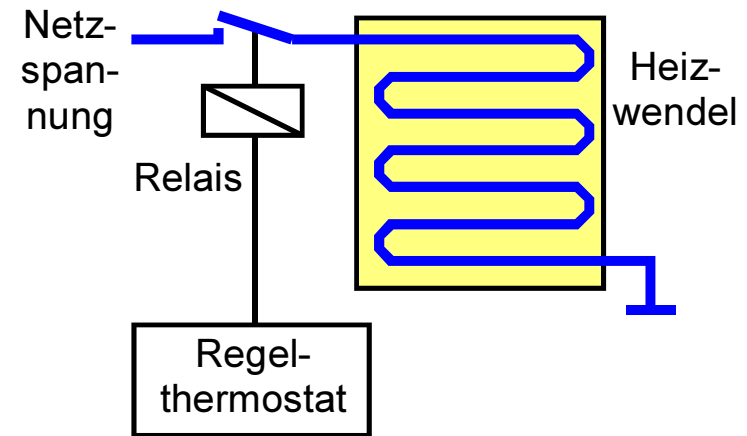
4.11 Nichtlineare Elemente: Schaltende Regler, Begrenzungen, Wind-Up-Effekte

Schaltende Regler: Beispiel Temperaturregelung

Heizkörper einer Zentralheizung

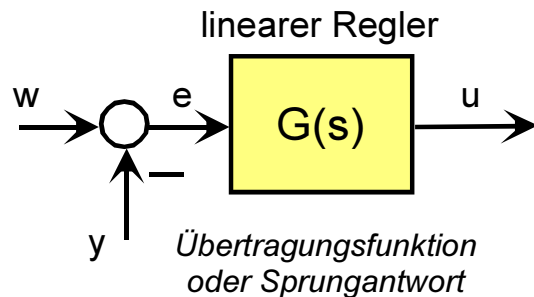


Heizung eines Backofens



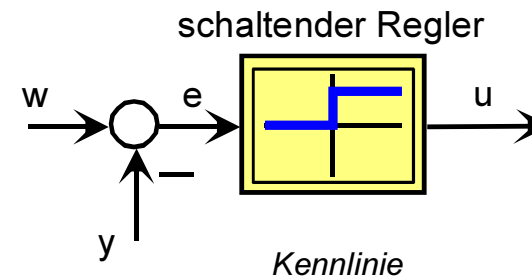
Stetige Regelfunktion

Temperatur zu niedrig \rightarrow Ventil weiter öffnen
Temperatur zu hoch \rightarrow Ventil weiter schließen



Schaltende Regelfunktion

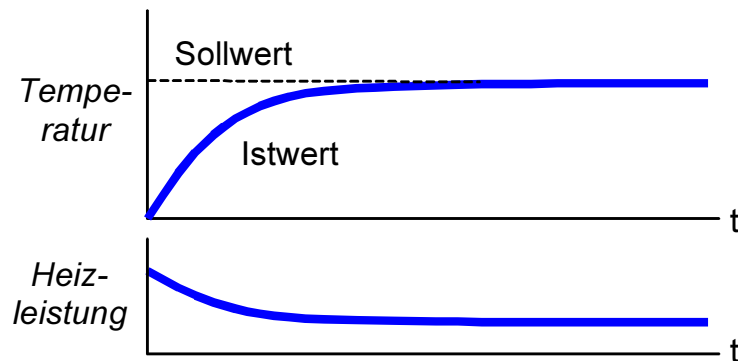
Temperatur zu niedrig \rightarrow Schalter ein
Temperatur zu hoch \rightarrow Schalter aus



In der Praxis (fast) immer mit Hysterese.

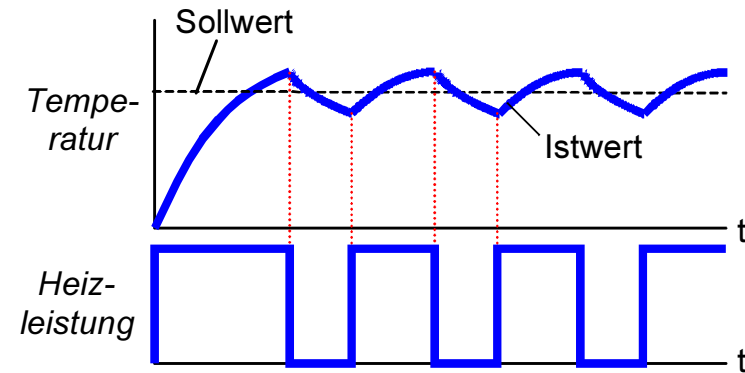
4.11 Nichtlineare Elemente: Schaltende Regler, Begrenzungen, Wind-Up-Effekte

Typische Sprungantwort der Regelung



Stetige Regelung

Kein echter eingeschwungener Zustand: Grenzyklus



(Schaltfrequenz nur durch Hysterese begrenzt)

Schaltende Regelung

Schaltende Regler werden eingesetzt, **wenn** das **Stellglied nicht stetig** arbeiten kann:

- Zweipunktregler

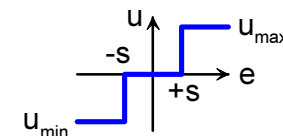
$e > 0$	\rightarrow	$u = U_{\max}$
$e < 0$	\rightarrow	$u = U_{\min}$

Beispiel: Motor ein – Motor aus
(häufig $U_{\min} = 0$ oder $U_{\min} = -U_{\max}$)

- Dreipunktregler

$-S < e < +S$	\rightarrow	$u = 0$
$e > +S$	\rightarrow	$u = U_{\max}$
$e < -S$	\rightarrow	$u = U_{\min}$

Beispiel: Motor aus – Linkslauf – Rechtslauf

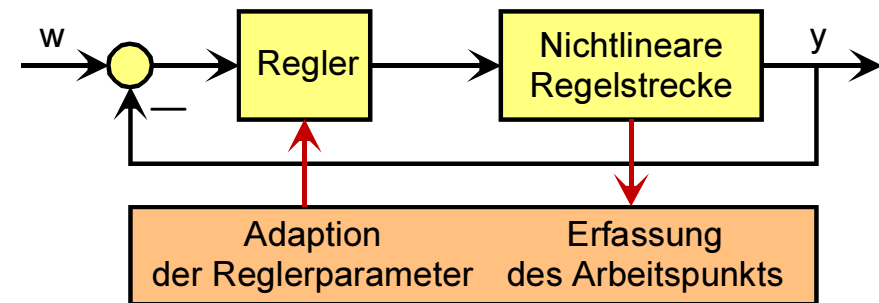


Meist werden die Regler mit **Hysterese** ausgeführt oder das Ausgangssignal abgetastet.

Das **Verhalten** schaltender Regler **wird meist im Zeitbereich analysiert**, oft durch Simulation (Übertragungsfunktionen dürfen nur für lineare Systeme verwendet werden!).

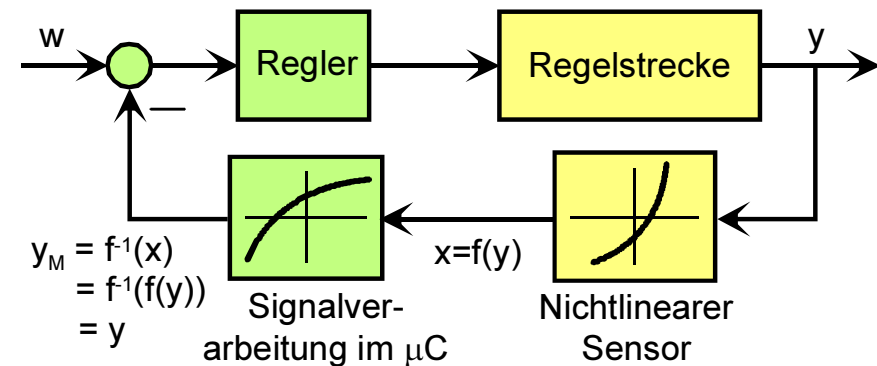
4.11 Nichtlineare Elemente: Schaltende Regler, Begrenzungen, Wind-Up-Effekte

Stetige Nichtlinearitäten können für die Analyse linearisiert werden. Aber: Das nichtlineare Verhalten der Regelstrecke führt zu einer Variation der Verstärkung der Regelstrecke in Abhängigkeit vom Arbeitspunkt. Bei digitalen Reglern kann dies im Betrieb durch zwei Möglichkeiten kompensiert werden:



- **Parameteranpassung** des Reglers im Betrieb

Einfachste Form: Die Reglerparameter werden für verschiedene Arbeitspunkte vorab berechnet und in einer Tabelle (Kennfeld) abgelegt.

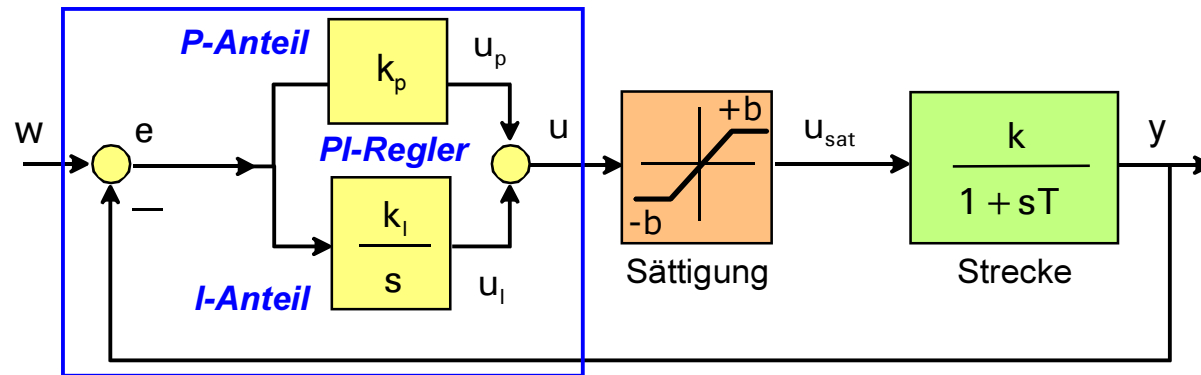


- Linearisierung durch **inverse Kennlinie**

Wenn die Nichtlinearität $f(\dots)$ direkt am Streckeneingang (z.B. im Stellglied) oder am Streckenausgang (z.B. im Sensor) sitzt und die nichtlineare Funktion eindeutig umkehrbar ist, kann die inverse Funktion $f^{-1}(\dots)$ in Reihe geschaltet werden.

4.11 Nichtlineare Elemente: Schaltende Regler, Begrenzungen, Wind-Up-Effekte

• Begrenzungen im Stellglied und Anti-Windup-Maßnahmen im Regler



Strecke $k = 0,5 \quad T = 1\text{sec}$

PI-Regler: $k_p = 4 \quad k_I = \frac{k_p}{T/2}$

Sättigung: $b = 2,1$

Sollwert: $w(t) = \sigma(t)$

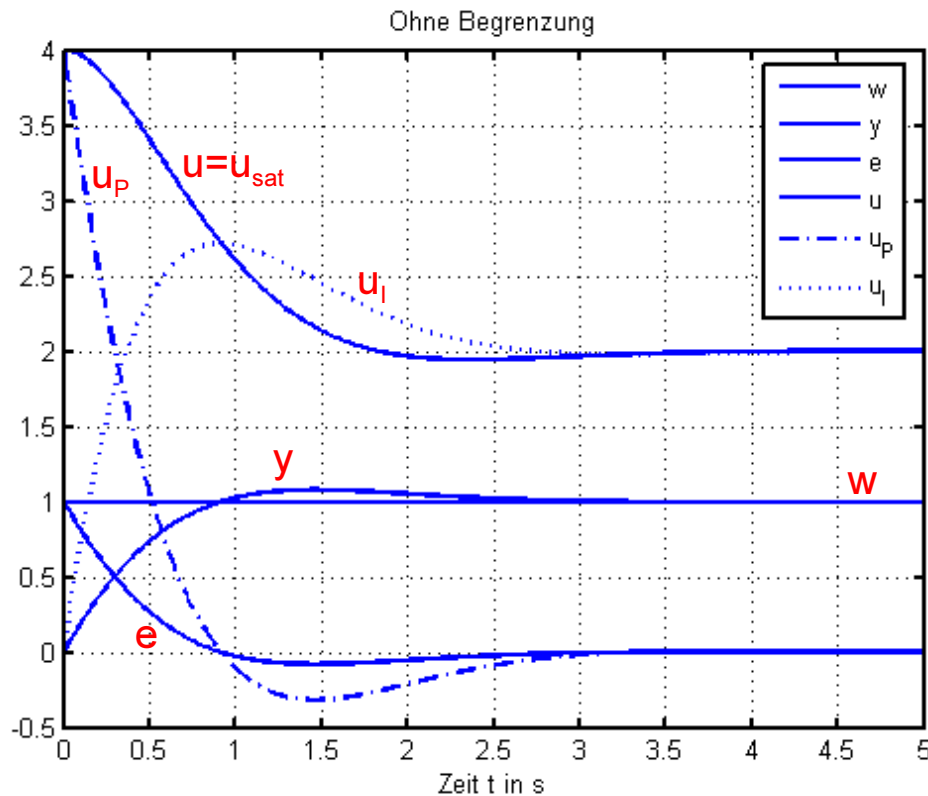
$\rightarrow u(t \rightarrow \infty) = 2$

Regler mit Integralanteil reagieren mit einer deutlichen Verschlechterung des Einschwingverhaltens, wenn das Stellglied in die Begrenzung gerät (**Wind-Up-Effekt**). Die Simulation auf der folgenden Seite zeigen den Wind-Up-Effekt im obigen Beispiel:

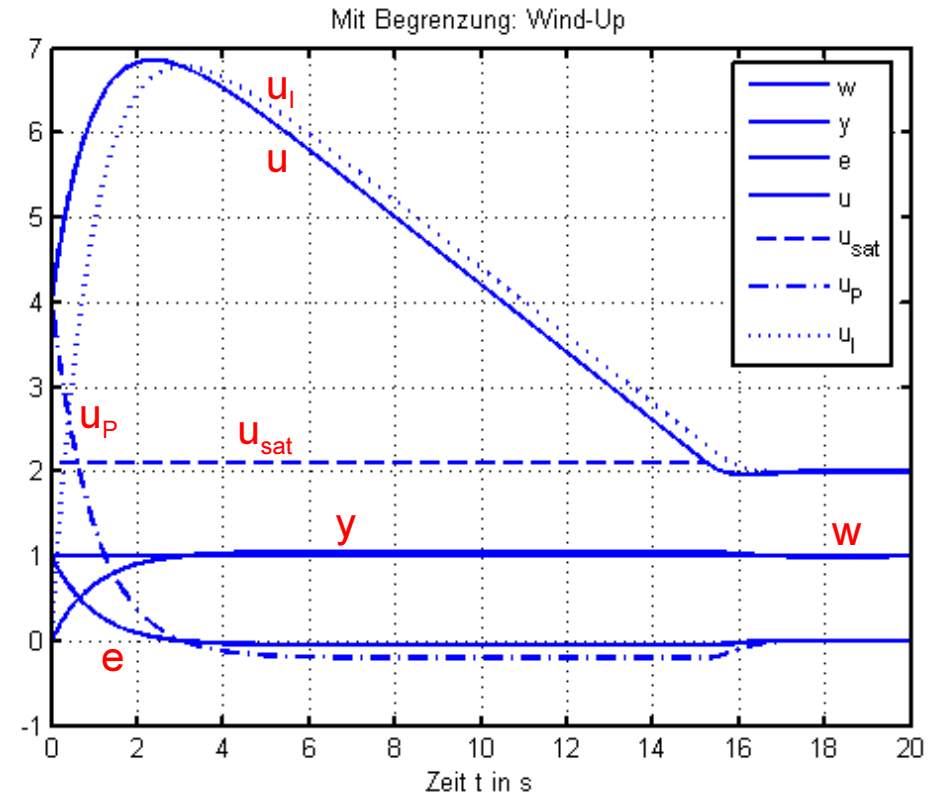
- Sprung der Führungsgröße $w \rightarrow$ große Regeldifferenz $e \rightarrow$ Stellgröße in Beschränkung u_{sat} (z.B. durch P-Anteil) \rightarrow über längeren Zeitraum große Regeldifferenz e mit positivem Vorzeichen
- I-Anteil integriert die Regeldifferenz \rightarrow I-Anteil u_I versucht, die Stellgröße, die bereits durch den P-Anteil sehr groß ist, weiter zu vergrößern und wächst übertrieben an \rightarrow zunächst keine Auswirkung, weil Stellgröße ohnehin in Beschränkung
- Aber: Sobald die Regeldifferenz e das Vorzeichen wechselt: Großer I-Anteil u_I drückt weiter in „alte“ Richtung und verursacht langes Überschwingen der Regelgröße \rightarrow großer I-Anteil u_I wird erst durch negative Regeldifferenz „zurückintegriert“ \rightarrow **sehr lange Ausregelzeit**

4.11 Nichtlineare Elemente: Schaltende Regler, Begrenzungen, Wind-Up-Effekte

Simulation ohne Sättigung



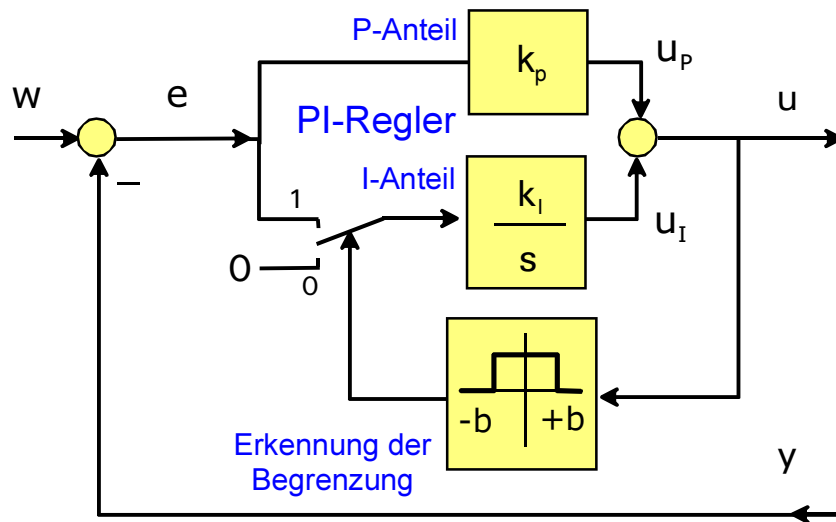
Sättigung aktiv → Wind-Up-Effekt tritt auf



4.11 Nichtlineare Elemente: Schaltende Regler, Begrenzungen, Wind-Up-Effekte

Durch eine Anti-Wind-Up-Maßnahme im Regler kann verhindert werden, dass der I-Anteil über alle Grenzen hoch läuft, wenn die Stellgröße ohnehin bereits in der Sättigung ist.

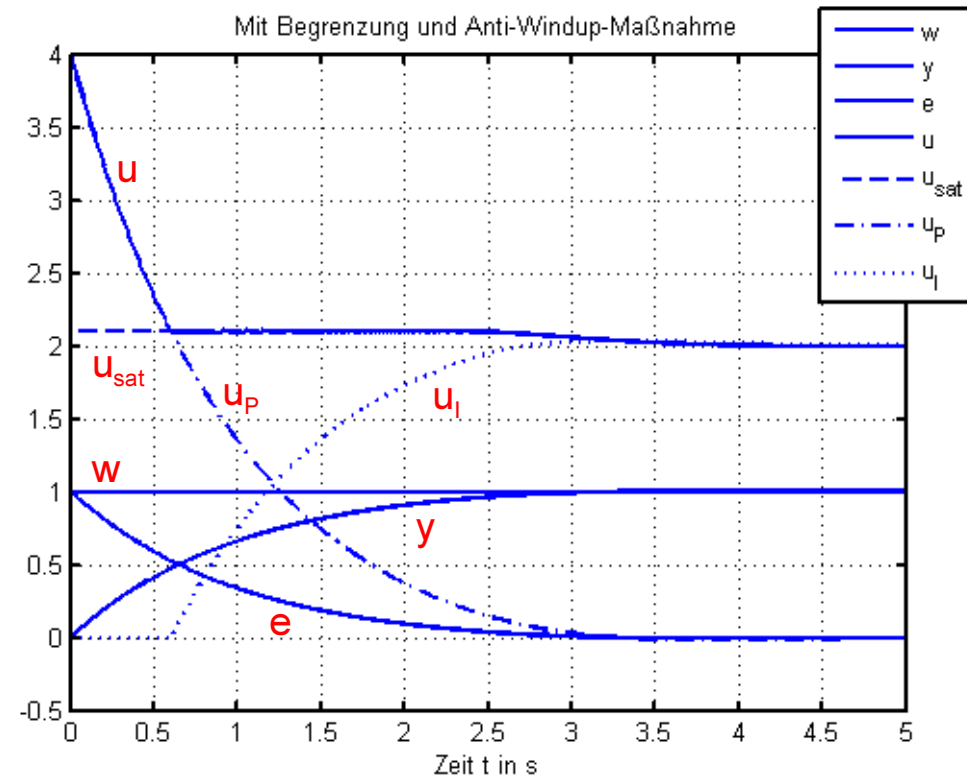
PI-Regler mit Anti-Wind-Up



Falls die Stellgröße des PI-Reglers den erlaubten Stellgrößenbereich überschreitet, wird der I-Anteil festgehalten. Zeitdiskret ergibt sich folgender Algorithmus:

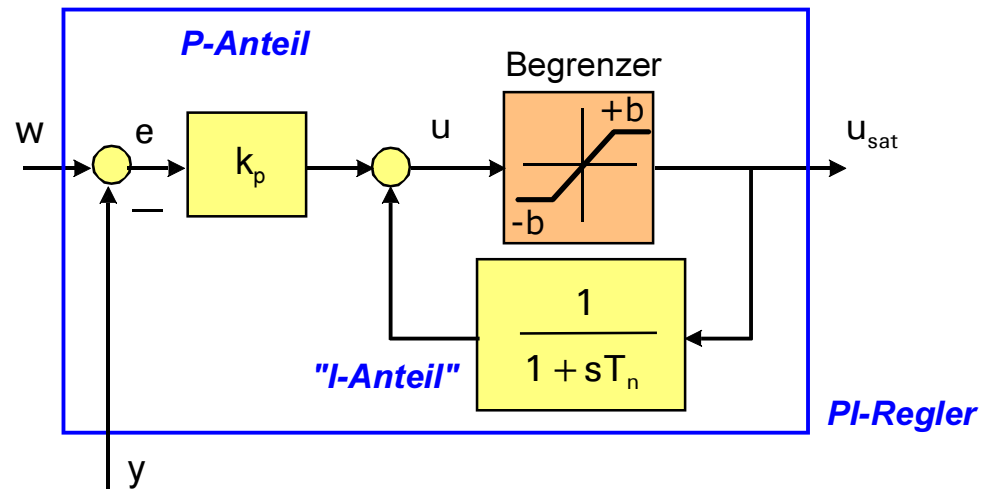
- P-Anteil: $u_p(k) = k_p \cdot e(k)$
- I-Anteil: Wenn $-b < u_p(k) + u_I(k-1) < b$: $u_I(k) = u_I(k-1) + k_p \cdot T/T_n \cdot e(k)$ sonst $u_I(k) = u_I(k-1)$
- Stellgröße: $u(k) = u_p(k) + u_I(k)$

Simulationsergebnis mit Stellgrößenbeschränkung und Anti-Wind-Up:



4.11 Nichtlineare Elemente: Schaltende Regler, Begrenzungen, Wind-Up-Effekte

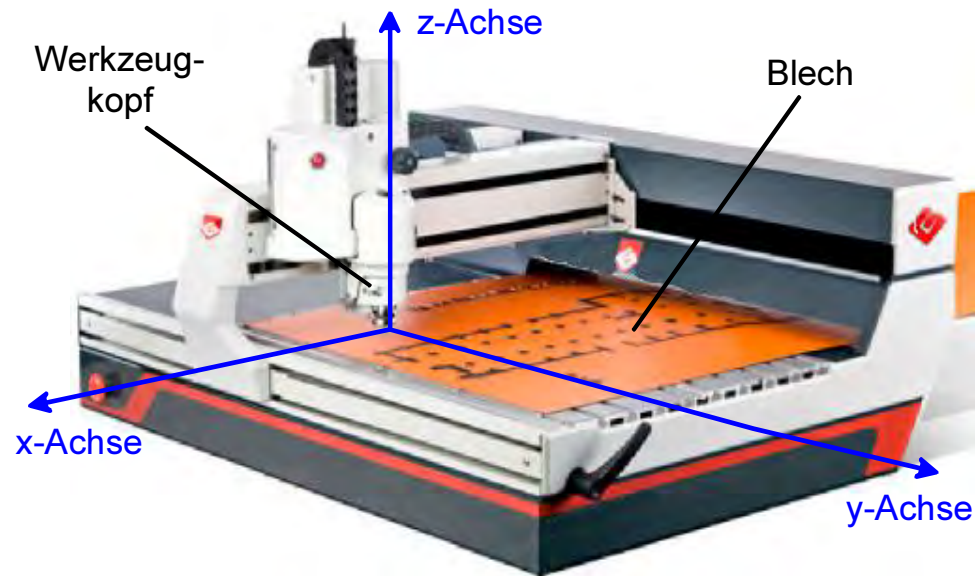
In der Praxis existieren verschiedene Anti-Windup-Strukturen, die abhängig davon, ob die Begrenzung primär durch einen sehr großen P-Anteil oder durch einen sehr großen I-Anteil verursacht wird, unterschiedliche Vor- und Nachteile haben. Eine sehr günstige Struktur für einen Anti-Windup-PI-Regler ist z.B.



Der I-Anteil ist indirekt über das mitgekoppelte PT1-Glied realisiert. Verwendet man dabei die reale Stellgröße u_{sat} , werden Toleranzen oder Driften der Grenzwerte $+b$, $-b$ automatisch berücksichtigt.

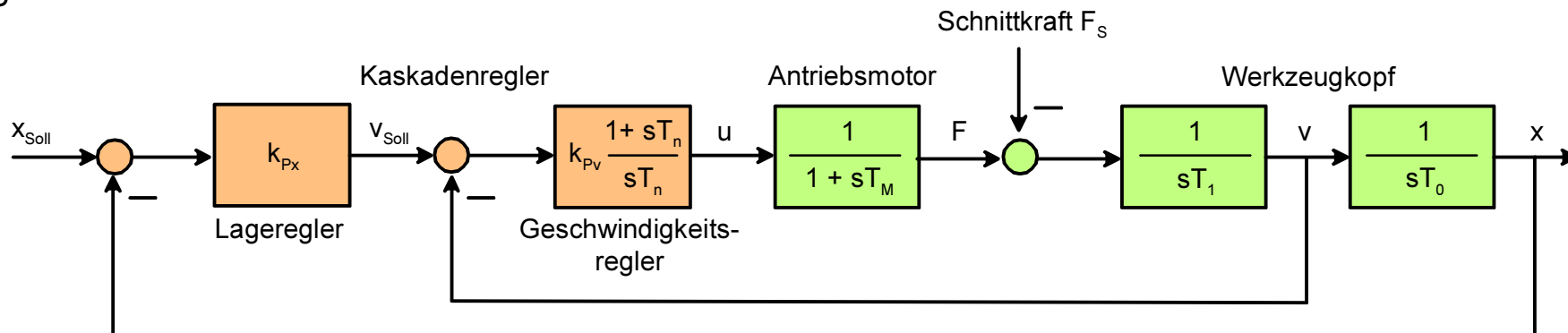
4.12 Führungsgrößengeneratoren und Vorsteuerung

Anwendungsbeispiel Blechschneide- und Gravurmaschine



- Der Kopf mit dem Schneid- oder Fräs Werkzeug wird durch Elektromotoren in x-, y- und z-Richtung so bewegt, dass die entsprechenden Konturen aus dem Blech geschnitten werden.
- Die Lage des Werkzeugkopfs wird in allen drei Achsen geregelt. Die Lageregelung muss genau, schnell und ohne Überschwingen sein.
- Die Qualität der Schnittfläche hängt davon ab, dass die Schnittgeschwindigkeit nicht stark schwankt.
- Die Schnittkraft des Materials wirkt als veränderliche Störgröße und hängt vom Material, der Schnitttrichtung und Schnittgeschwindigkeit ab.

Regelkreis für eine Achse



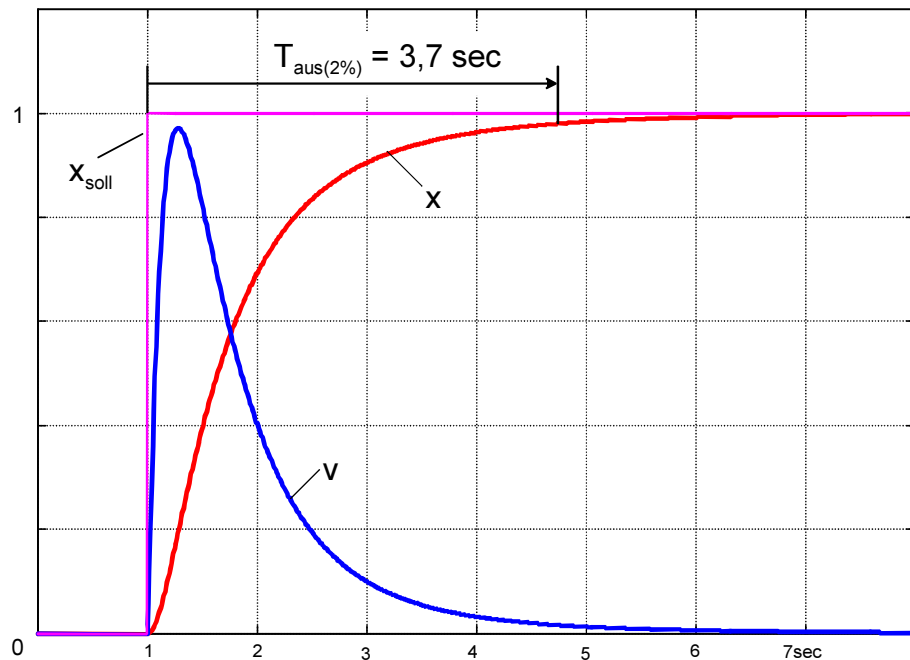
mit $T_M = 10 \text{ msec}$, $T_1 = 100 \text{ msec}$, $T_0 = 1 \text{ sec}$, alle Größen normiert

4.12 Führungsgrößengeneratoren und Vorsteuerung

Um einen Schnitt in x-Richtung durchzuführen, könnte man dem Regelkreis einen Sollwertsprung für x_{Soll} vorgeben (Linkes Diagramm unten. Simulation für $F_S=0$. Die Reglerparameter k_{pX} , k_{pV} wurden so gewählt, dass der innere und der äußere Regelkreis jeweils eine Phasenreserve von ca. 85° haben.):

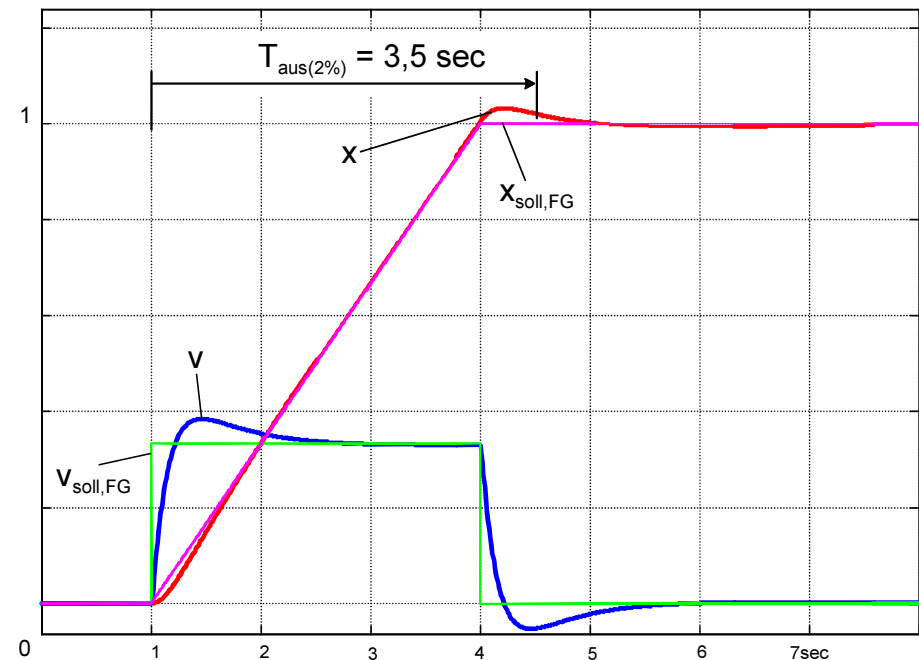
Regelkreis ohne Vorsteuerung

- Sprungförmige Vorgabe von x_{Soll}



Regelkreis mit Vorsteuerung

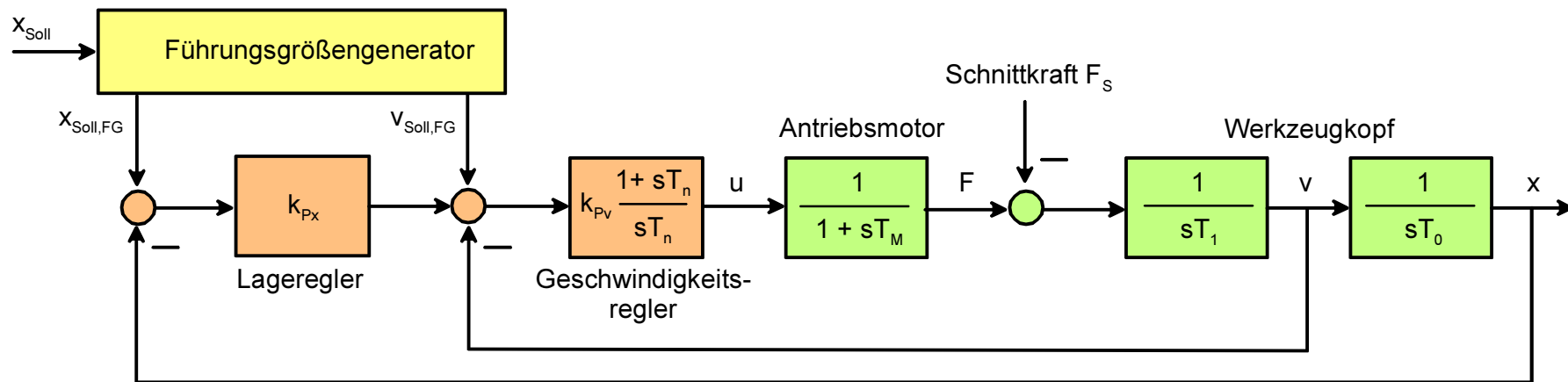
- Rampenförmige Vorgabe von x_{Soll}
- Zusätzlicher Geschwindigkeitssollwert $x_{Soll,FG}$



Wirklich sinnvoll sind sprungförmige Änderungen von x_{Soll} nicht, da der reale Werkzeugkopf ja nicht springen kann. Außerdem steigt die Geschwindigkeit während der Bewegung stark an und fällt schnell wieder ab, was zu einer schlechten Schnittqualität führen kann.

4.12 Führungsgrößengeneratoren und Vorsteuerung

Besser ist es, $x_{\text{Soll,FG}}$ durch einen Führungsgrößengenerator rampenförmig vorzugeben und auf den Geschwindigkeitsregler einen zusätzlichen, zum Verlauf von $x_{\text{Soll,FG}}$ passenden Geschwindigkeitssollwert $v_{\text{Soll,FG}}$ aufzuschalten:



Wie man in der Simulation (rechtes Diagramm oben) sieht, ist der Geschwindigkeitsverlauf während der Bewegung wesentlich gleichmäßiger. Würde man den Sollwert $x_{\text{Soll,FG}}$ S-förmig statt rampenförmig vorgeben und den dazu passenden Geschwindigkeitssollwert $v_{\text{Soll,FG}}$ erzeugen, könnte man auch den „Anfahr- und Bremsruck“ am Anfang und Ende der Bewegung und das im rechten Diagramm zu sehende kleine Überschwingen vermeiden. Solche Bewegungsprofile sind z.B. bei Aufzugsanlagen und besseren Werkzeugmaschinen üblich.

Formelzeichen und Bezeichnungen

Unglücklicherweise sehen die DIN-Normen für die Regelungstechnik und die Nachrichtentechnik (Digitale Signalverarbeitung DSV, Signale und Systeme) unterschiedliche Bezeichnungen für einige wichtige Größen vor. Die Unterschiede sind in der Tabelle dargestellt.

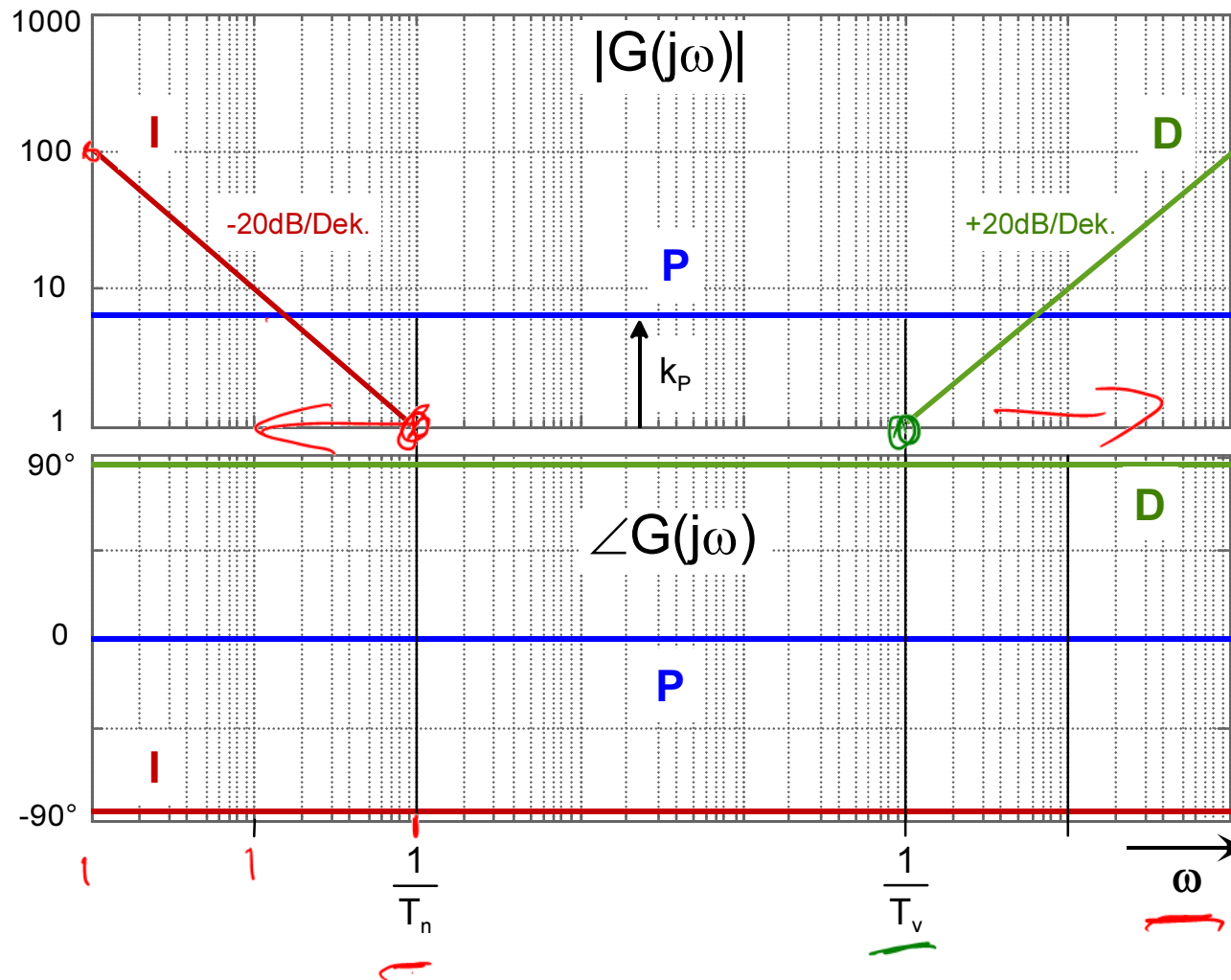
<i>deutsch</i>	<i>englisch</i>	<i>Formelzeichen</i>	
		<i>Regelungs- technik</i>	<i>Signalver- arbeitung</i>
Abtastzeit	sampling time	T	
Amplitudengang Betragsfrequenzgang	amplitude response	$ G(j\omega) $	
Anregelzeit	rise time	T_{an}	
Ausgangsgröße	output signal	Y	
Ausgleichszeit	recovery time	T_g	
Ausregelzeit	settling time	T_{aus}	
Betragsreserve	gain margin	B_R	
bleibende Regelabweichung	steady state error	$e(t \rightarrow \infty)$	
Dämpfungsfaktor	degree of damping	D	
Differenzierzeit	differential time	T_D	
Diracimpuls	dirac impulse	$\delta(t)$	
Drehgeschwindigkeit	angular speed	ω	
Drehmoment	torque	M	
Drehwinkel	angle	α	
Eingangsgröße	input signal	u	
Eingeschwungener Zustand	steady state		
Einschwingvorgang	transition		
Frequenz	frequency	f	
Frequenzgang	frequency response	$G(j\omega)$	
Führungsgröße	reference input	u	
Sollwert	set value	w	
Geschwindigkeit	speed	v	
Impulsantwort Gewichtsfunktion	impulse response	$g(t)$	$h(t)$
Induktivität	inductance	L	
Integrierzeit	integrating time	T_i	
Kapazität	capacitance	C	
Kondensator	capacitor		
Kraft	force	F	
Kreisfrequenz	angular frequency	ω	
Laplacevariable Frequenzvariable	Laplace variable	$s = \sigma + j\omega$	p
Masse	mass	m	
Massenträgheit	inertia	J	
Meßfühler, Sensor	sensor		
Meßglied	measuring unit		

Formelzeichen und Bezeichnungen

deutsch	englisch	Formelzeichen	
		Regelungs- technik	Signalver- arbeitung
Nachstellzeit	integrator time constant	T_n	
Nullstelle	zero	N	
Phasengang	phase response	$\angle G(j\omega)$	
Phasenreserve	phase margin	φ_R	
Polstelle	pole	p	
Rampe	ramp function	$r(t)$	
Regeldifferenz	error signal	e	
Regelkreis, Regelsystem	feedback control system		
Regelstrecke	control plant		
Regelung	(feedback) control		
Regler	controller		
Reglerausgang	controller output		
Rückführgröße Regelgröße	feedback signal	y	
Spannung	voltage	u	
Sprungantwort Übergangsfunktion	step response	$h(t)$	$a(t)$
Sprungfunktion	step function	$\sigma(t)$	
Spule	coil		
Stellgröße	control signal		
Steuerung	forward control		
Störgröße	disturbance signal	v	
Strom	current	i	
Tiefpaß n.Ordnung, PTn Verzögerungsglied	k-order lag		
Totzeit Verzugszeit	dead time delay time	T_d, T_t T_u	
Überschwingweite	maximum overshoot value	a	
Übertragungsfunktion	transfer function	$G(s)$	$H(p)$
Übertragungsverhalten	dynamic behaviour		
Verstärkung	gain	k	
Vorhaltezeit	derivative time constant	T_v	
Weg	way	x	
Widerstand	resistance, resistor	R	
Zeit	time	T	
Zeitkonstante	time constant	T_1	
z-Übertragungsfunktion		$G(z)$	$H(z)$
Zustandsgröße	state variable	x	
z-Variable	z variable	z	

Frequenzkennlinien

In den Frequenzkennlinien werden die Kreisfrequenz ω und der Betrag $|G(j\omega)|$ grundsätzlich logarithmisch, die Phase $\angle G(j\omega)$ dagegen linear dargestellt:



P-, I- und D-Glied

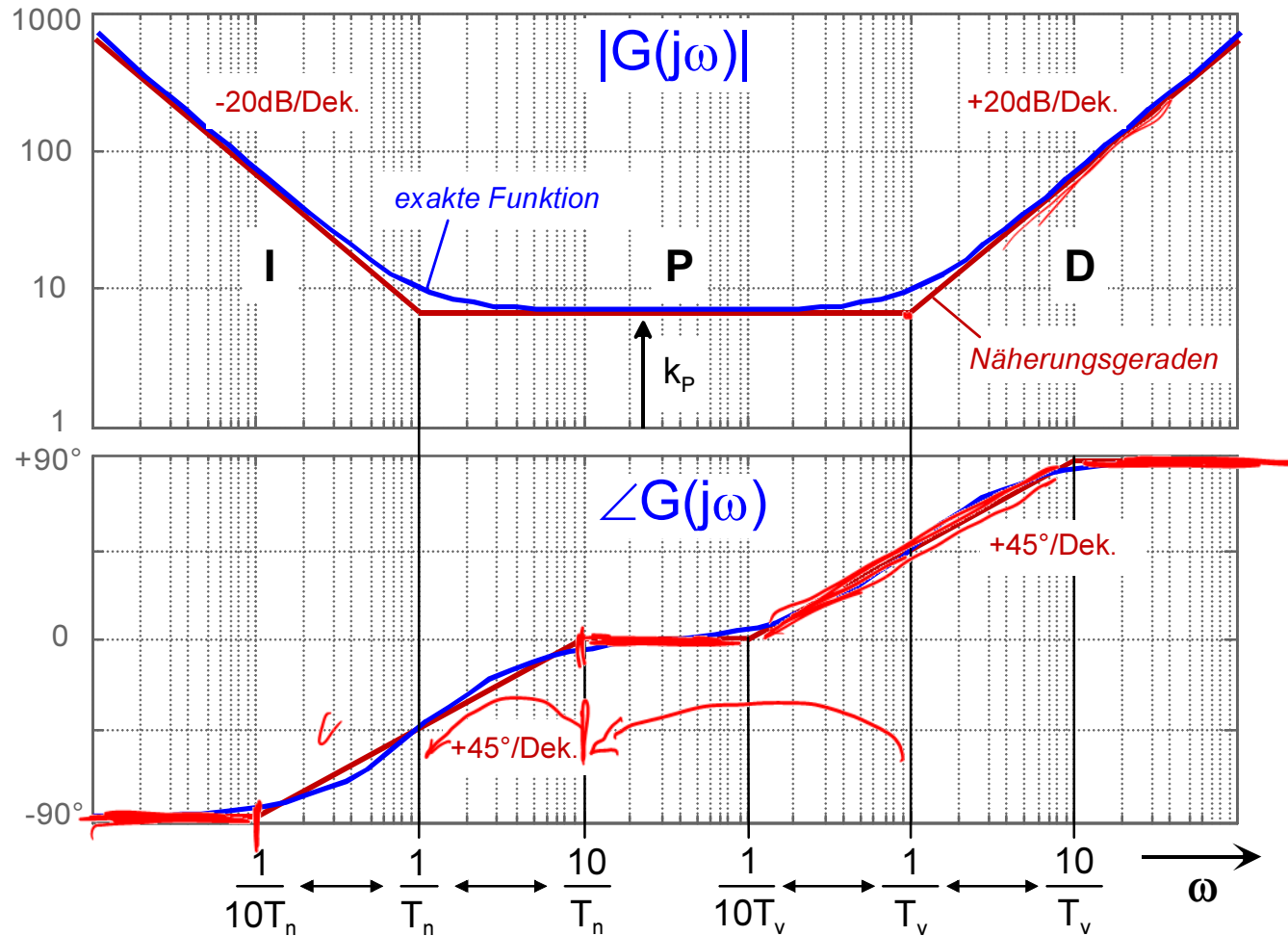
Die Frequenzkennlinien der Grundglieder P, I und D sind einfache Geraden:

P-Glied $G(\omega) = k_p$
 Betrag: konstant k_p
 Phase: 0

I-Glied $G(\omega) = \frac{1}{j \omega T_n}$
 Betrag: fällt mit -20dB/Dekade
 Verstärkung 1 bei $\omega = 1/T_n$
 Phase: -90°

D-Glied $G(\omega) = j \omega T_v$
 Betrag: steigt mit $+20\text{dB/Dekade}$
 Verstärkung 1 bei $\omega = 1/T_v$
 Phase: $+90^\circ$

Frequenzkennlinien



PID-Regler

In der Frequenzkennlinie

$$G(j\omega) = k_p \left\{ 1 + \frac{1}{j\omega T_n} + j\omega T_v \right\}$$

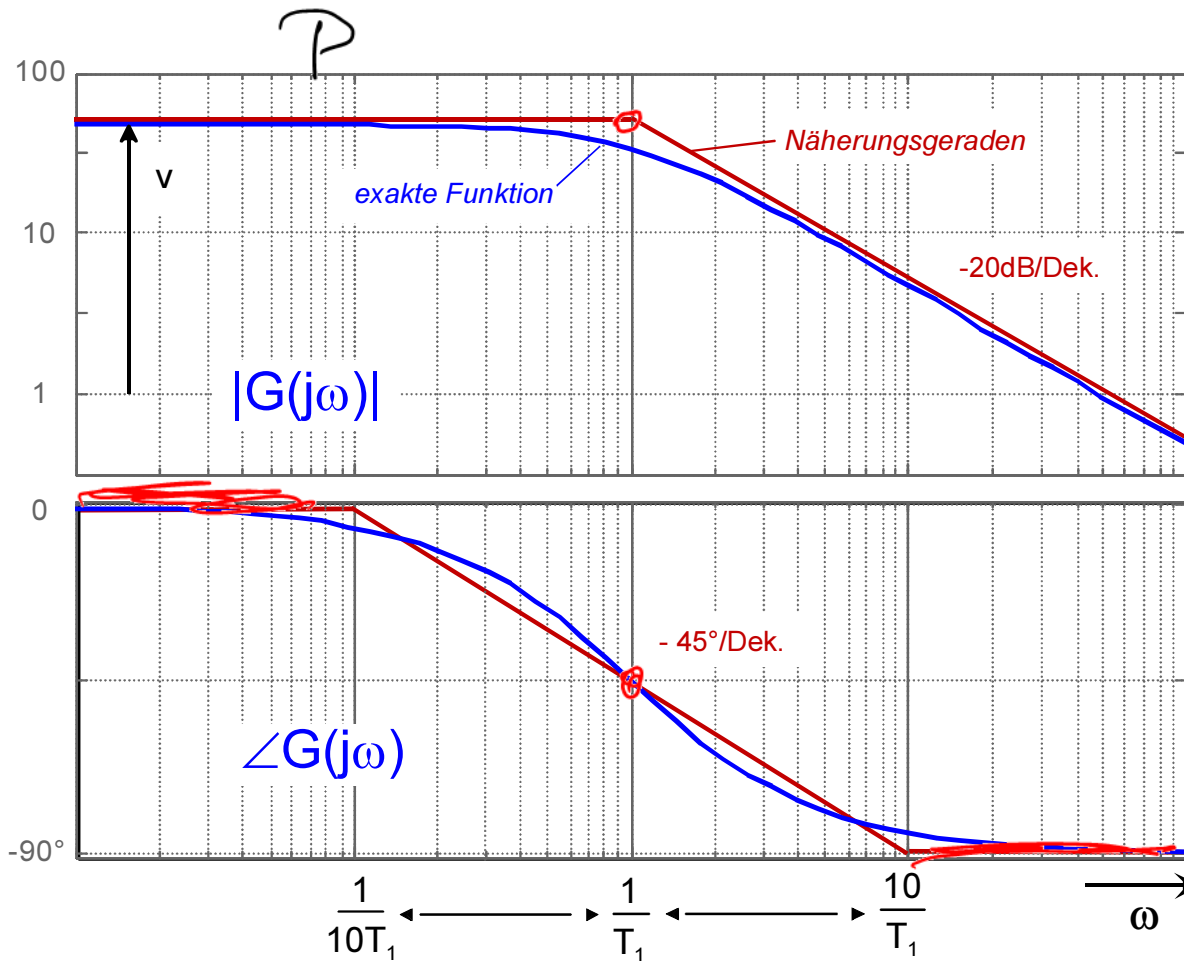
dominiert

- bei niedrigen Frequenzen $\omega < 1/T_n$ der **I-Anteil** (Betrag fällt mit -20dB/Dekade, Phase -90°)
- bei mittleren Frequenzen der **P-Anteil** (Betrag konstant k_p , Phase 0°)
- bei hohen Frequenzen $\omega > 1/T_v$ der **D-Anteil** (Betrag steigt mit +20dB/Dekade, Phase +90°)

PI- und PD-Regler sind Sonderfälle des PID-Reglers.

Die exakten Wurzel- bzw. Arcus-Tangens-Funktionen können durch **Geradennäherungen** ersetzt werden, die beim Betragsverlauf bei den Eckkreisfrequenzen $\omega = 1/T_n$ bzw. $1/T_v$ aneinanderstoßen. Die Phasenübergänge erfolgen im Bereich von je einer Dekade unterhalb bis zu einer Dekade oberhalb der Eckfrequenzen.

Frequenzkennlinien



PT1-Strecke

$$G(j\omega) = \frac{v}{1 + j\omega T_1}$$

- bei niedrigen Frequenzen verhält sich die Strecke wie ein **P-Glied** (Betrag konstant v , Phase 0)
- bei hohen Frequenzen verhält sich die Strecke wie ein **I-Glied** (Betrag fällt mit -20dB/Dekade , Phase -90°)
- Der Übergang erfolgt im Bereich der Eckkreisfrequenz

$$\omega = \frac{1}{T_1}$$

DT1-Glieder $G(j\omega) = \frac{j\omega T_0}{1+j\omega T_1}$ verhalten sich umgekehrt wie PT1-Strecken:

- bei hohen Frequenzen: Betrag konstant T_0/T_1 , Phase 0
- bei niedrigen Frequenzen: Betrag steigend mit $+20\text{dB/Dekade}$, Phase $+90^\circ$.

- Die exakten Funktionen lassen sich wie beim PID-Regler durch Geradensegmente annähern.

Frequenzkennlinien

Bei der **Reihenschaltung verschiedener Übertragungsglieder**, z.B. Regler $G_R(s)$, Strecke $G_S(s)$ und Messglied $G_M(s)$ im offenen Regelkreis $G_o(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)$

- multiplizieren sich die Beträge $|G_o(j\omega)| = |G_R(j\omega)| \cdot |G_S(j\omega)| \cdot |G_M(j\omega)|$
bzw. $\log |G_o(j\omega)| = \log |G_R(j\omega)| + \log |G_S(j\omega)| + \log |G_M(j\omega)|$
- addieren sich die Phasen $\angle G(j\omega) = \angle G_R(j\omega) + \angle G_S(j\omega) + \angle G_M(j\omega)$

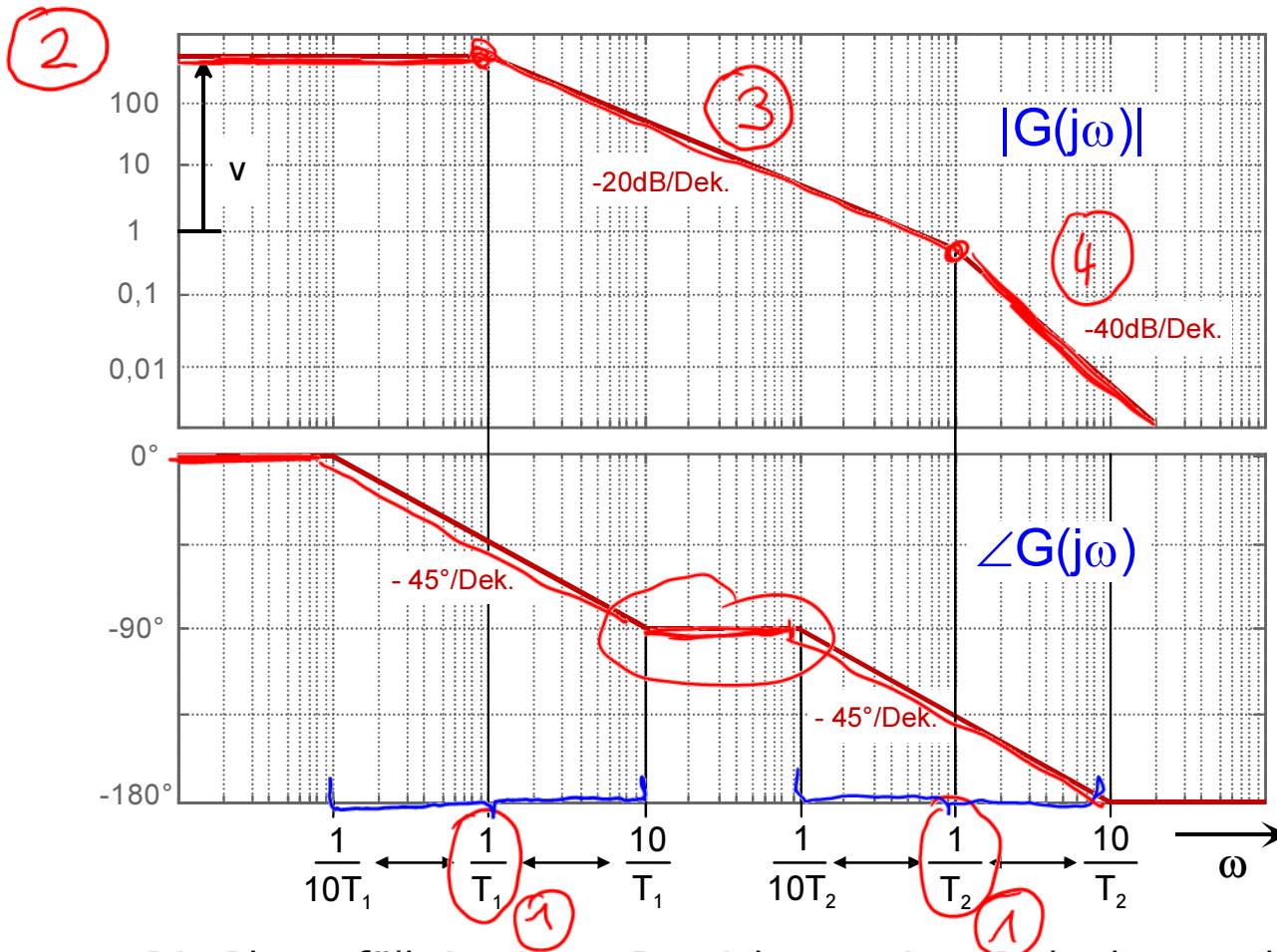
Ein **PT2-Glied** $G(s) = \frac{V}{1+s2DT+s^2T^2}$ lässt durch **2 PT1-Glieder** $G(s) = \frac{V}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$ ersetzen, **falls $D \geq 1$** ist. Dabei gilt: $2DT = T_1 + T_2$ und $T^2 = T_1 T_2$
bzw. $T_1 = T (D + \sqrt{D^2 - 1})$ und $T_2 = T (D - \sqrt{D^2 - 1})$

(Beweis: Ausmultiplizieren der 2. Gleichung und Koeffizientenvergleich mit der 1. Gleichung)

Bei $D < 1$ verhält sich das PT2-Glied für Frequenzen $\omega \ll 1/T$ näherungsweise wie ein P-Glied (Betrag v , Phase 0), für Frequenzen $\omega \gg 1/T$ wie ein I2-Glied (Betrag fällt mit -40dB/Dekade, Phase -180°). Im Bereich um die Eckkreisfrequenz $\omega \approx \frac{\sqrt{1-D^2}}{T}$ ergibt sich eine Resonanzüberhöhung $\approx \frac{V}{2D}$ im Betrag und die Phase fällt mit $\approx \frac{90^\circ/\text{Dekade}}{D}$. Resonanzüberhöhung und Phasenabfall sind umso größer, je kleiner D wird.

Bei $D=0$ ist die Resonanzüberhöhung theoretisch unendlich groß und die Phase springt.

Frequenzkennlinien



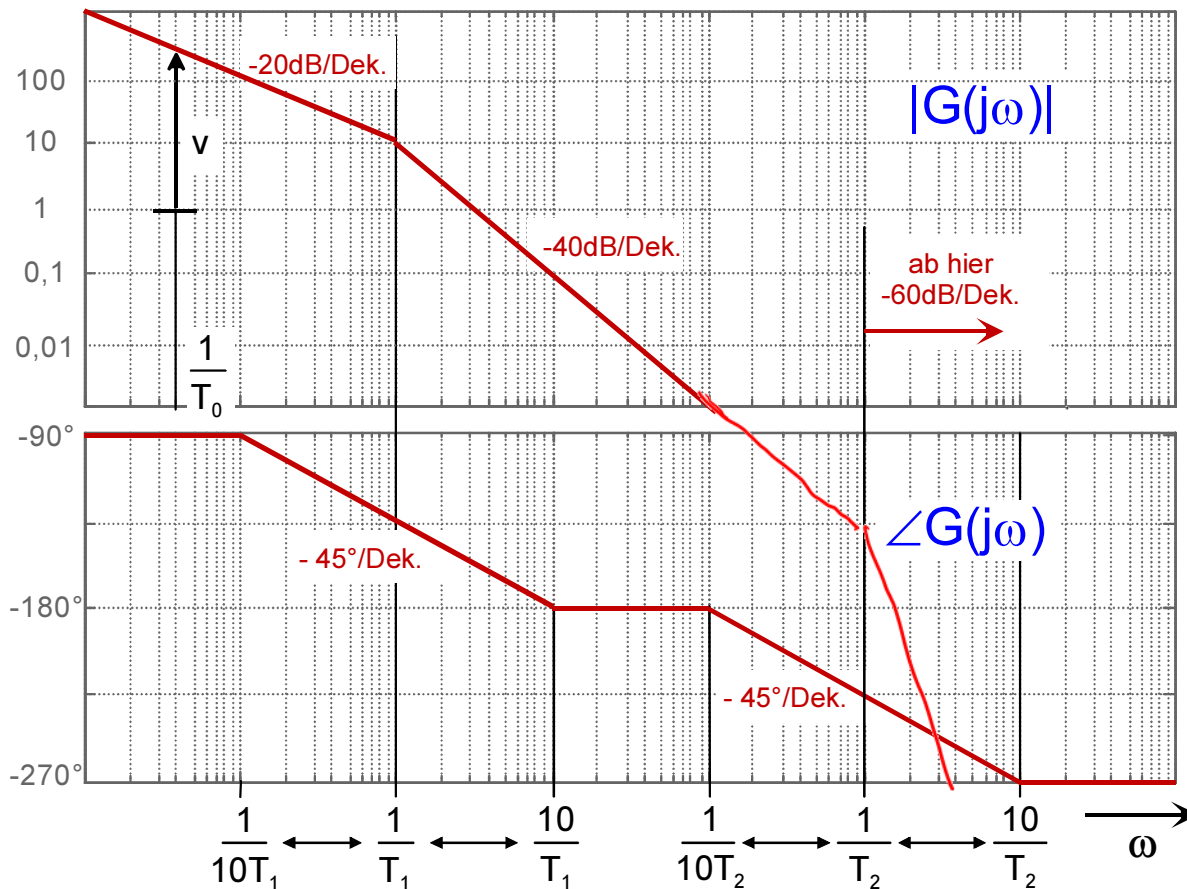
PT_n-Strecke

$$G(j\omega) = \frac{v}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2) \cdots (1+j\omega T_n)}$$

mit $T_1 > T_2 > \dots > T_n$

- Bei niedrigen Frequenzen ist der Betrag konstant v und die Phase 0° (P-Verhalten).
- Oberhalb der 1. Eckkreisfrequenz $\omega = 1/T_1$ fällt der Betrag mit -20dB/Dekade (I-Verhalten), oberhalb der 2. Eckkreisfrequenz $\omega = 1/T_2$ mit -40dB/Dekade (I²-Verhalten), oberhalb der k . Eckkreisfrequenz mit $-k \cdot 20\text{dB/Dekade}$.

- Die Phase fällt in einem Bereich von einer Dekade unterhalb bis zu einer Dekade oberhalb der jeweiligen Eckfrequenz um $-45^\circ/\text{Dekade}$. Falls sich zwei Übergangsbereiche der Phase überlappen, entstehen Bereiche mit $-90^\circ/\text{Dekade}$.
- Bei $\omega \gg 1/T_n$ fällt der Betrag mit $-n \cdot 20\text{dB/Dekade}$, die Phase ist konstant $-n \cdot 90^\circ$.



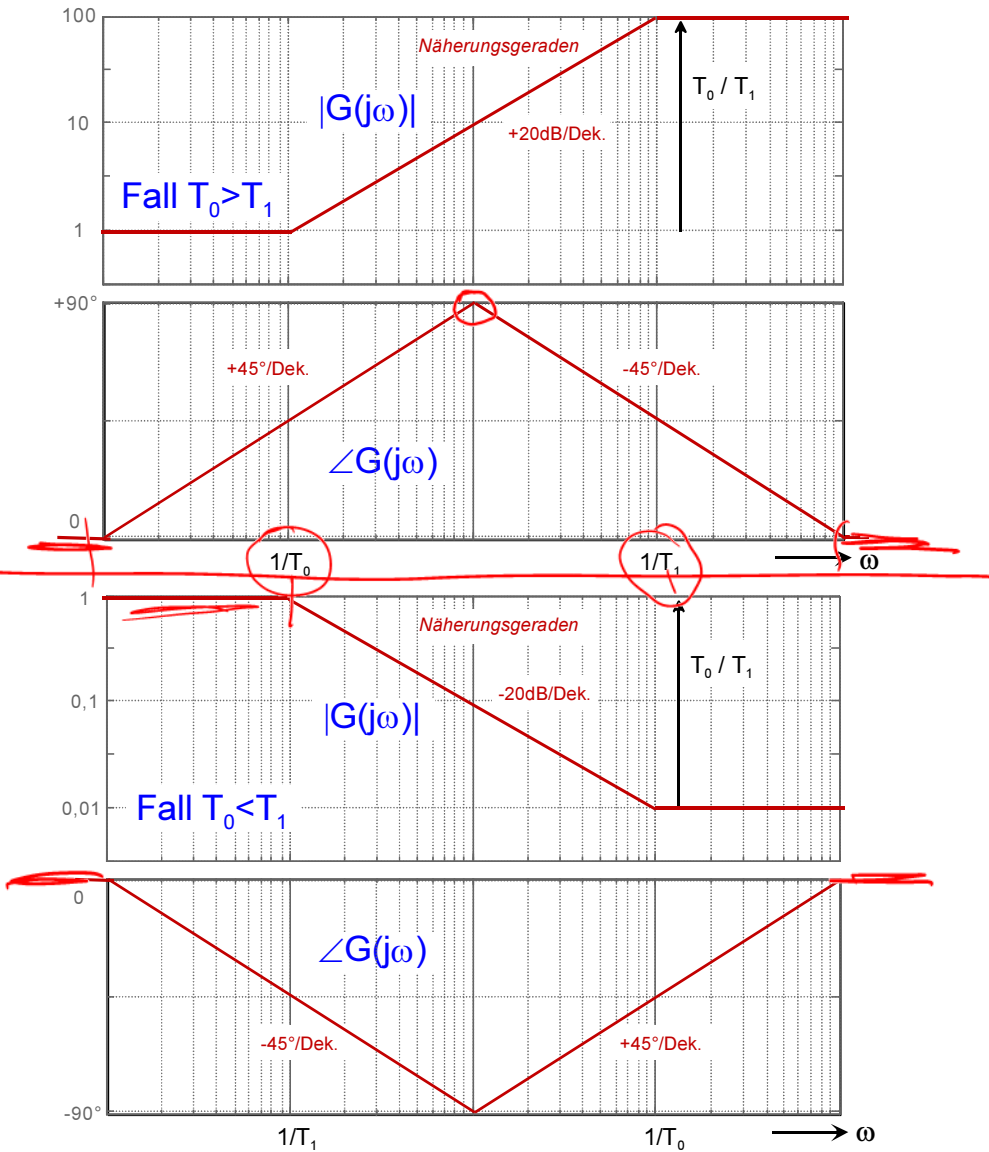
I-PTn-Strecke

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_0} \cdot \frac{v}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \cdot \dots \cdot (1 + j\omega T_n)}$$

mit $T_1 > T_2 > \dots > T_n$

- Bei Frequenzen $\omega < 1/T_1$ fällt der Betrag bereits mit -20dB/Dekade und die Phase ist -90° (I-Verhalten).
- Dabei ist $|G(\omega = 1/T_0)| = v$
(falls $T_0 > T_1 > \dots > T_n$)

- Für $\omega > 1/T_1$ verhält sich die Frequenzkennlinie wie bei einer PTn-Strecke, wobei sich durch das zusätzliche I-Glied der Betragsabfall um -20dB/Dekade und die Phasennacheilung um -90° erhöht.

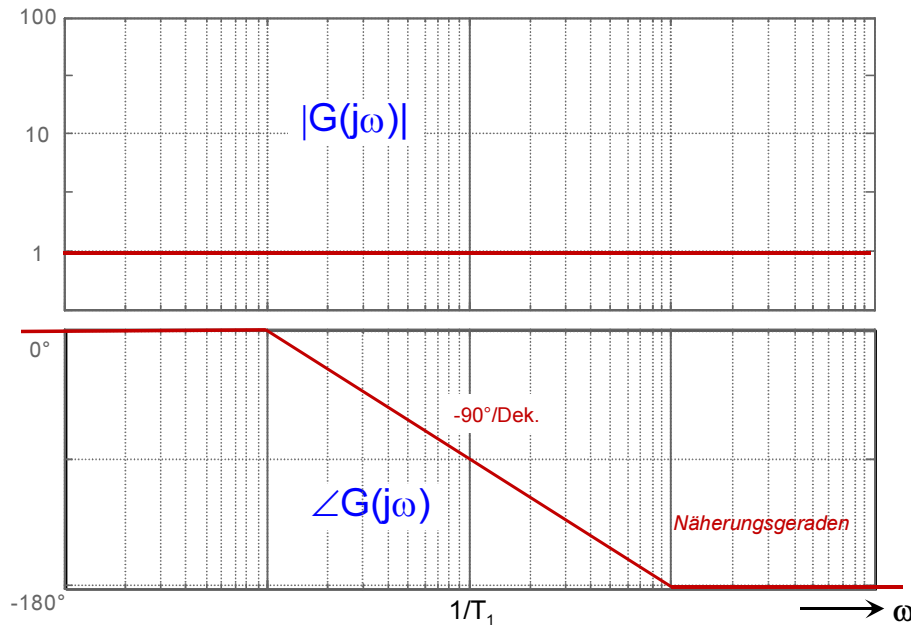


PDT1-Glied (Lead-Lag-Glied)

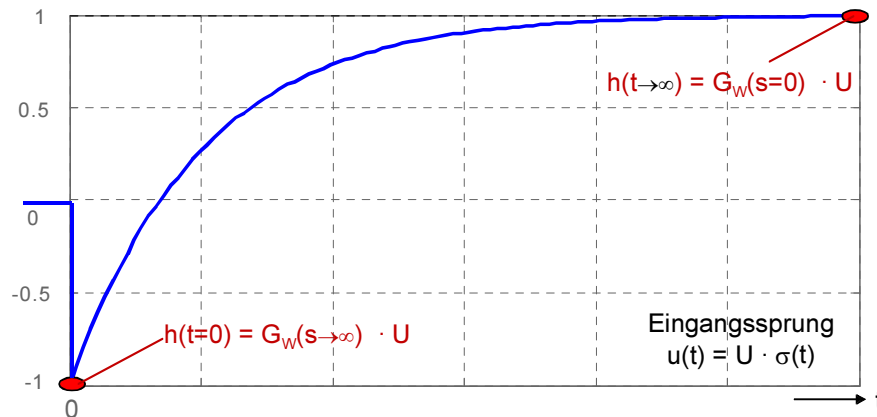
$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_0}{1 + j\omega T_1}$$

- bei niedrigen und hohen Frequenzen verhält sich die Strecke wie ein **P-Glied** (Betrag konstant, Phase 0°)
- bei mittleren Frequenzen verhält sich die Strecke wie ein **D-Glied** falls $T_0 > T_1$ ist (Betrag steigt mit +20dB/Dek., Phase eilt bis zu +90° vor), bzw. wie ein **I-Glied** falls $T_0 < T_1$ ist (Betrag fällt mit -20dB/Dek., Phase eilt bis zu -90° nach).
- Die Übergänge erfolgen im Bereich der Eckkreisfrequenzen

$$\omega_0 = \frac{1}{T_0} \text{ und } \omega_1 = \frac{1}{T_1}$$



Zusammenhang Frequenzgang – Sprungantwort am Beispiel Allpaß (gilt allgemein):



Allpaß-Glied 1.Ordnung

$$G(j\omega) = \frac{1 - j\omega T_1}{1 + j\omega T_1}$$

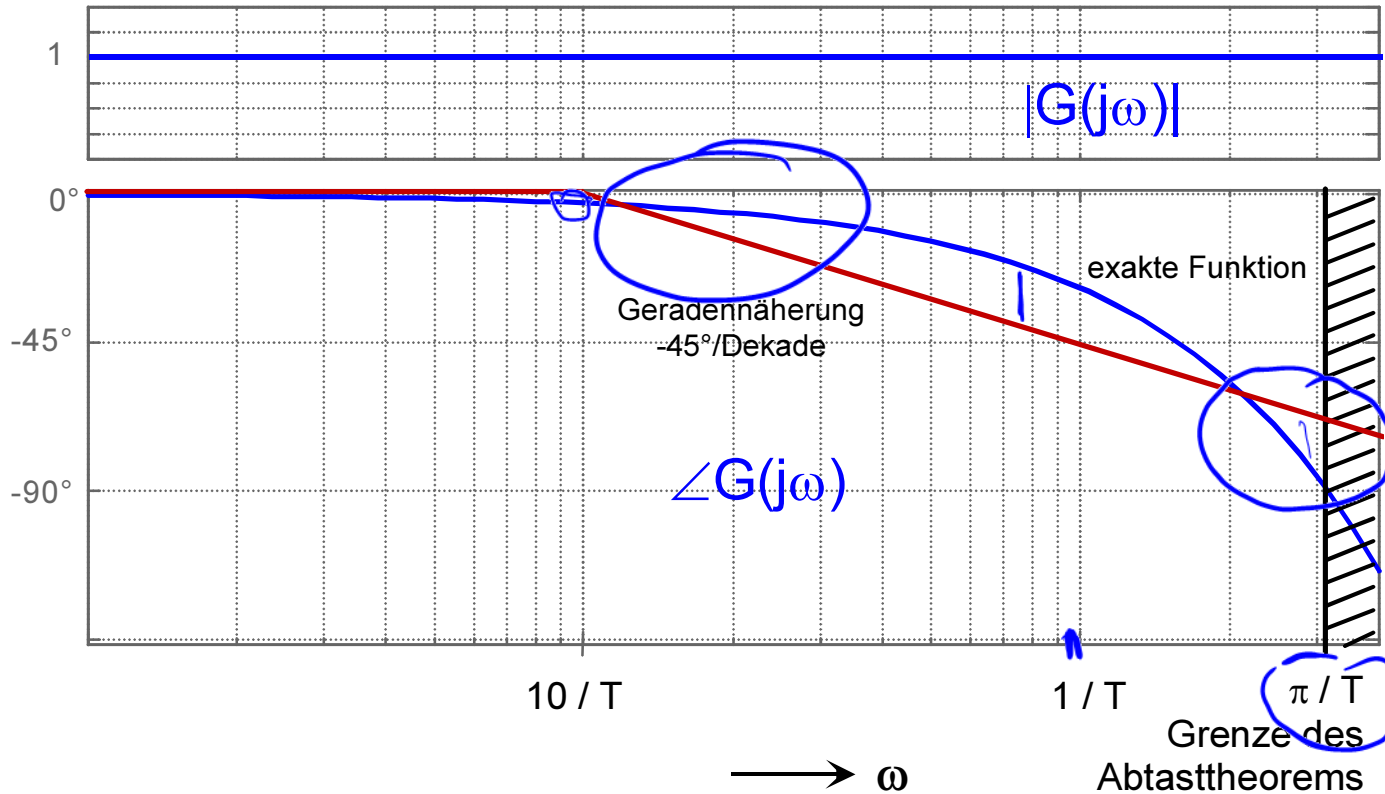
Achtung:

Ein Allpass ist kein Minimalphasensystem, da er eine Nullstelle in der rechten Hälfte der s-Halbebene hat. Folge: Phasenabfall trotz konstanter Verstärkung (im Gegensatz zu PID, PTn oder I-Gliedern, bei denen die Phase nur abfällt, wenn auch der Betrag abnimmt).

- **Betrag bei allen Frequenzen konstant 1**
- **Phase bei niedrigen Frequenzen 0, bei hohen Frequenzen -180°**
- Phasenübergang erfolgt im Bereich der Eckkreisfrequenz

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}$$

Abtast- und Halteglied



Beschreibung des Abtast- und Haltevorgangs mit der Abtastzeit T durch ein Totzeitglied $G(j\omega) = e^{-j\omega T/2}$ mit

Betrag $|G(j\omega)| = 1$

Phase $\angle G(j\omega) = -\omega T/2$

Näherung des Phasengangs $\angle G(j\omega)$ für Kreisfrequenzen $\omega > 10/T$:

Gerade mit $-45^\circ/\text{Dekade}$

P-, I-, Tiefpass- und Hochpass-Verhalten in Frequenzkennlinien

Ein Übertragungssystem hat

- Tiefpassverhalten, wenn $0 < |G(\omega=0)| < \infty$ UND $|G(\omega \rightarrow \infty)| \rightarrow 0$
Tiefe Frequenzen werden „durchgelassen“, hohe Frequenzen werden gesperrt
- Hochpassverhalten, wenn $|G(\omega=0)| = 0$ UND $0 < |G(\omega \rightarrow \infty)| < \infty$
Hohe Frequenzen werden „durchgelassen“, tiefe Frequenzen werden gesperrt
- I-Verhalten, wenn $|G(\omega=0)| \rightarrow \infty$ UND $\angle |G(\omega=0)| < 0^\circ$
 $|G(\omega)|$ fällt bei niedrigen Frequenzen mit -20dB/Dekade
- D-Verhalten, wenn $|G(\omega \rightarrow \infty)| \rightarrow \infty$ UND $\angle |G(\omega \rightarrow \infty)| > 0^\circ$
 $|G(\omega)|$ steigt bei hohen Frequenzen mit +20dB/Dekade

Betrags- und Phasenverlauf bei niedrigen und hohen Frequenzen

Allgemeine Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^k T_0^k} \cdot \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$$

Exakte Ordnungszahl: $k+n$ (nur Nenner)

Effektive Ordnungszahl: $k+n-m$

Bei Systemen ohne Ik-Verhalten ist $k=0$

Bei niedrigen Frequenzen $\omega \rightarrow 0$

$$|G(\omega)| \quad : \quad -k \cdot 20\text{dB/Dekade}$$

$$\angle G(\omega) \quad : \quad -k \cdot 90^\circ$$

Bei hohen Frequenzen $\omega \rightarrow \infty$

$$|G(\omega)| \quad : \quad (-k-n+m) \cdot 20\text{dB/Dekade}$$

$$\angle G(\omega) \quad : \quad (-k-n+m) \cdot 90^\circ$$

Kochrezept zum Zeichnen von Frequenzkennlinien

Allgemeine Übertragungsfunktion $G(s) = \underbrace{\frac{1}{(s T_0)^k}}_{\text{Ik-Anteil}} \cdot v \cdot \underbrace{\frac{(1+sT_{z1})(1+sT_{z2}) \cdot \dots \cdot (1+sT_{zm})}{(1+sT_1)(1+sT_2) \cdot \dots \cdot (1+sT_n)}}_{\text{PDmTn-Zähler / PDmTn-Nenner}}$

Ik – P Dm Tn

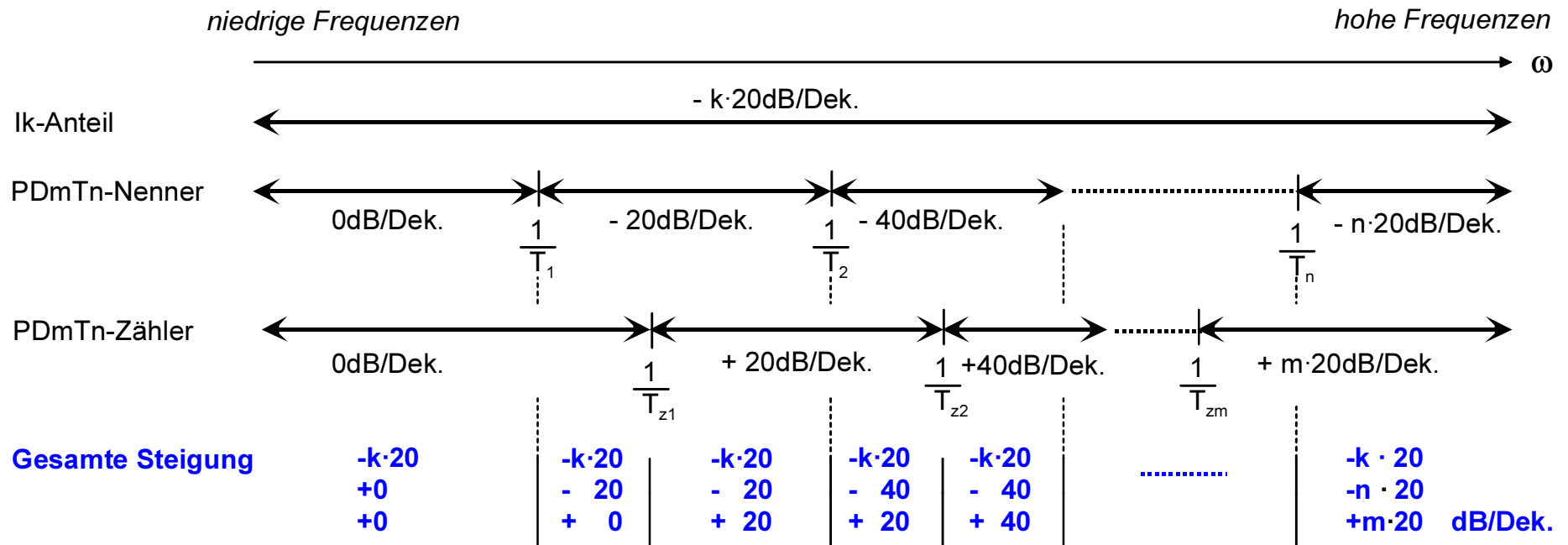
- k, m, n sind beliebige natürliche Zahlen (inkl. 0)
- Zeitkonstanten im Zähler bzw. Nenner jeweils nach Größe geordnet, d.h.

$$T_1 > T_2 > \dots > T_n \qquad T_{z1} > T_{z2} > \dots > T_{zm}$$

Betragsverlauf

- Alle Eckkreisfrequenzen $\frac{1}{T_1}, \dots, \frac{1}{T_n}$ bzw. $\frac{1}{T_{z1}}, \dots, \frac{1}{T_{zm}}$ einzeichnen (außer $1/T_0$!)
 - Steigungsbereiche von sehr niedrigen zu hohen Frequenzen hin markieren
 - Bei sehr niedrigen Frequenzen: $-k \cdot 20\text{dB/Dek.}$ (ohne Ik-Verhalten: 0)
 - Bei jeder Eckfrequenz des Nenners: $-20\text{dB/Dek. addieren}$ (außer bei $1/T_0$!)
 - Bei jeder Eckfrequenz des Zählers: $+20\text{dB/Dek. addieren}$
- Endsteigung bei sehr hohen Frequenzen: $(-k - n + m) \cdot 20\text{dB/Dek.}$

Frequenzkennlinien



- Punkt auf der Betragskurve

Ik-Glied: bei $\omega = \frac{1}{T_0}$: Verstärkung: 1

PDmTn-Glied: bei $\omega < \frac{1}{T_1}, \frac{1}{T_{z1}}$ Verstärkung: v

Gesamt: bei $\omega = \frac{1}{T_0}$, falls $\frac{1}{T_0} < \frac{1}{T_1}, \frac{1}{T_{z1}}$: Verstärkung: v

Phasenverlauf

- Übergangsbereiche um Eckkreisfrequenzen $\frac{1}{T_1}, \dots, \frac{1}{T_n}$ bzw. $\frac{1}{T_{z1}}, \dots, \frac{1}{T_{zm}}$ einzeichnen

(außer $1/T_0$!)

Übergangsbereiche beginnen jeweils eine Dekade links und enden eine Dekade rechts von der jeweiligen Eckkreisfrequenz.

- Phasenverlauf von sehr niedrigen zu hohen Frequenzen hin zeichnen:

Bei sehr niedrigen Frequenzen: $-k \cdot 90^\circ$ (ohne Ik-Verhalten: 0)

Übergangsbereich um Eckfrequenz des Nenners: $-45^\circ/\text{Dek. Abfall}$ (außer bei $1/T_0$!)

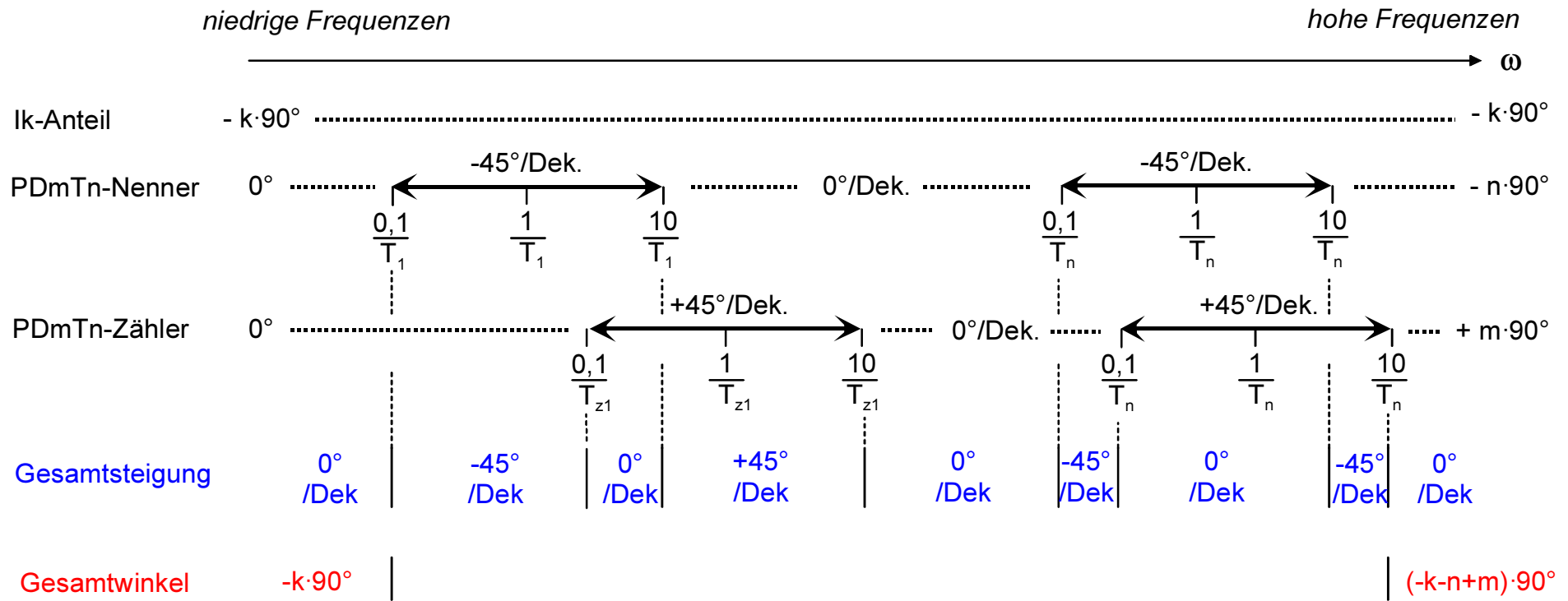
Übergangsbereich um Eckfrequenz des Zählers: $+45^\circ/\text{Dek. Anstieg}$

Wenn sich mehrere Übergangsbereiche überlappen: Abfall bzw. Anstieg addieren

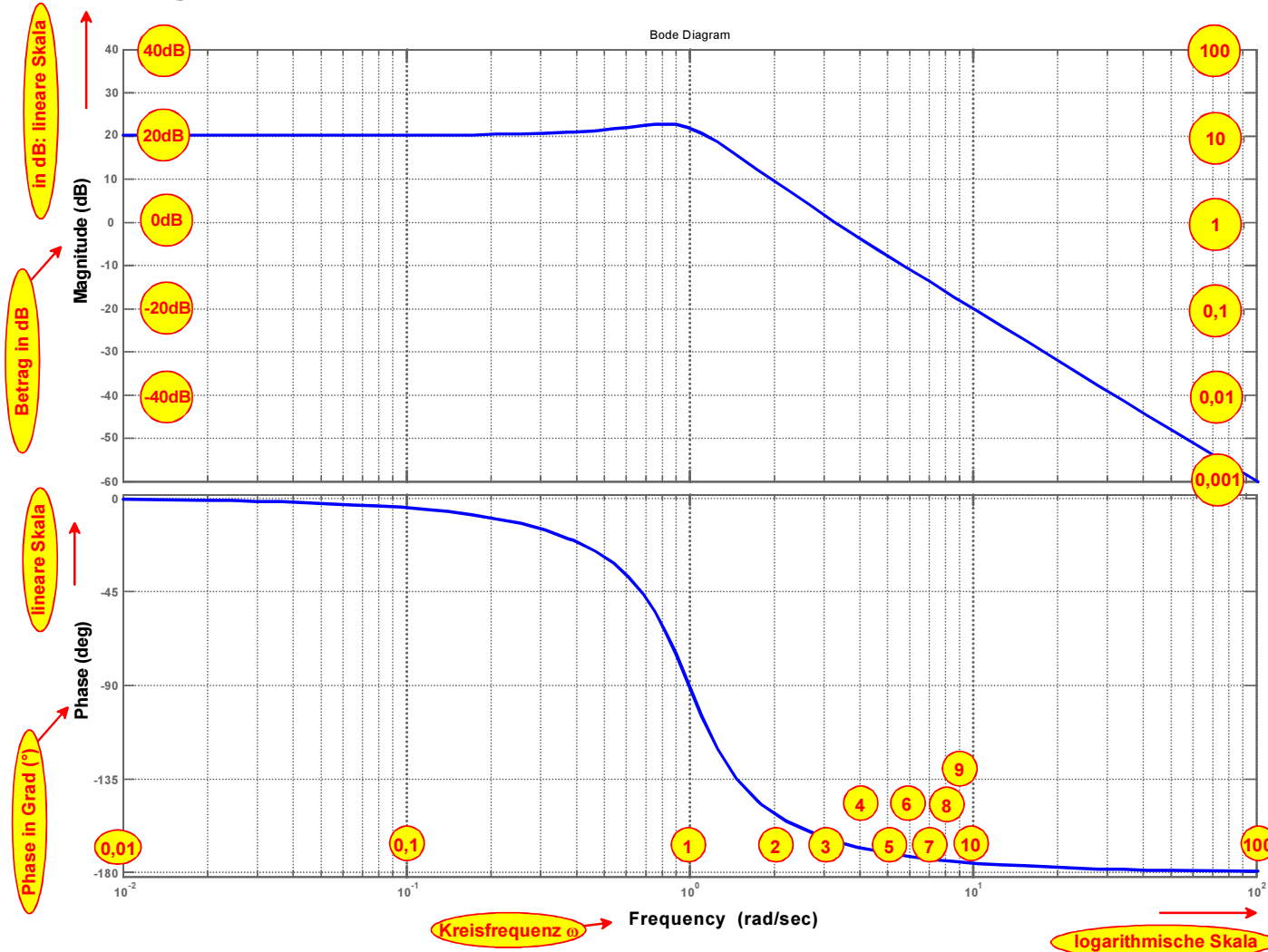
Links, rechts oder zwischen den Übergangsbereichen: waagerechter Verlauf

→ Endwinkel bei sehr hohen Frequenzen: $(-k - n + m) \cdot 90^\circ$

Frequenzkennlinien



Bode-Diagramme in Matlab



Verstärkung
 $V_{dB} = 20 \log V_{absolut}$

bzw.

$$V_{absolut} = 10^{V_{dB}/20}$$

Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Formelzeichen T , T_0 , T_1 , ...

werden in der Vorlesung Systemtechnik 1 für **unterschiedliche** Zwecke verwendet:

- **Abtastzeit bei zeitdiskreten Systemen**, in der Regel T , $T_{A(\text{btast})}$ oder $T_{S(\text{ample})}$
= Konstanter Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Messungen oder Berechnungen
→ Abtastfrequenz f bzw. $f_A = \frac{1}{T}$
- **Periodendauer T von Sinussignalen** oder anderen periodischen Signalen
= Konstanter Abstand in dem sich ein Signal wiederholt
→ Frequenz des Signals $f = \frac{1}{T}$ → Kreisfrequenz des Signals $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
- **Zeitkonstanten T_0 , T_1 , ... eines Übertragungsgliedes**
= durch Bauteilwerte festgelegte Parameter, die definieren, wie schnell die Exponentialfunktionen abklingen, aus denen sich die Sprungantwort zusammensetzt.

In Übertragungsfunktionen tauchen die Zeitkonstanten in der Regel als sT_0 , sT_1 , ... auf. Diese Terme haben bei den sogenannten **Eckkreisfrequenzen** $\omega = \frac{1}{T_0}, \frac{1}{T_1}, \dots$ den Wert 1 (Achtung: Hier taucht der Faktor 2π nicht auf!). Der Betragsverlauf der Frequenzkennlinien (Bode-Diagramm) hat bei PTn und PDn-Gliedern bei diesen Eckkreisfrequenzen einen Knick (eine „Ecke“).

Zeitkonstanten von Übertragungsgliedern selbst haben nichts mit der Periodendauer von Signalen zu tun!

Laplace- und Z-Transformation

Definition: $F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$ mit $f(t) \equiv 0$ für $t < 0$

$F(z) = Z\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k}$ mit $f(k) \equiv 0$ für $k < 0$

Rechenregeln

$$z = e^{sT}$$

	zeitkontinuierlich		zeitdiskret	
	im Zeitbereich	im s-Bereich	im Zeitbereich	im z-Bereich
Linearität	$a \cdot f(t) + b \cdot g(t)$	$a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$	$a \cdot f(k) + b \cdot g(k)$	$a \cdot F(z) + b \cdot G(z)$
Verschiebung nach rechts	$f(t-T_1) \quad T_1 > 0$	$e^{-sT_1} \cdot F(s)$	$f(k-m) \quad m > 0$	$z^{-m} \cdot F(z)$
Differentiation	$\frac{df(t)}{dt}$	$s \cdot F(s) - f(0)$	$\frac{f(k) - f(k-1)}{T}$	$\frac{1}{T} (1 - z^{-1}) \cdot F(z) = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z} \cdot F(z)$
Integration	$\int_0^t f(\tau) dt$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$	$\sum_{v=0}^k f(v) \cdot T$	$\frac{F(z)}{1-z^{-1}} \cdot T = \frac{z}{z-1} \cdot F(z) \cdot T$
Anfangswert	$f(0+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$	$f(0)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} \cdot F(z)$
Endwert	$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$ (nur gültig, falls $f(\infty)$ existiert)	$f(\infty)$	$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot F(z)$ (nur gültig, falls $f(\infty)$ existiert)
Faltung	$\int_0^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau$	$F(s) \cdot G(s)$	$\sum_{v=0}^{\infty} f(k-v) \cdot g(v)$	$F(z) \cdot G(z)$

Laplace- und Z-Transformation

period.Funktion	$\sum_{v=0}^{\infty} f_0(t-vT_1)$	$F_0(s) \cdot \frac{1}{1-e^{-sT_1}}$		
Ähnlichkeit	$f(a \cdot t)$	$\frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$		
Dämpfung	$f(t) \cdot e^{-at}$	$F(s+a)$		
Grenzwert			$\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$	$\lim_{z \rightarrow 1} F(z)$

Korrespondenztabelle $f(t) \equiv 0$ für $t < 0$

$f(k) \equiv 0$ für $k < 0$

zeitkontinuierlich: $f(t)$	$F(s)$	zeitdiskret: $f(k)$	$F(z)$
Einheitsimpuls $\delta(t)$	1	$\delta(k)$	1
$\delta(t-T_1)$	e^{-sT_1}	$\delta(k-m)$	z^{-m}
Einheitssprung $\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$\sigma(t-T_1)$	$\frac{e^{-sT_1}}{s}$	$\sigma(k-m)$	$\frac{z}{z-1} \cdot z^{-m}$
t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{z}{(z-1)^2} T$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$(kT)^2$	$\frac{z \cdot (z+1)}{(z-1)^3} T^2$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$		

Laplace- und Z-Transformation

zeitkontinuierlich: f(t)	F(s)	zeitdiskret: f(k)	F(z)
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s \cdot (s+a)}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{z \cdot (1 - e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$k \cdot e^{-akT}$	$\frac{ze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$t^2 \cdot e^{-at}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$		
$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{a^k - b^k}{a-b}$	$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sin \omega_0 kT$	$\frac{z \cdot \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cdot \cos \omega_0 T + 1}$
$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\cos \omega_0 kT$	$\frac{z \cdot (z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cdot \cos \omega_0 T + 1}$
$e^{-at} \cdot \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-akT} \cdot \sin \omega_0 kT$	$\frac{z \cdot e^{-aT} \cdot \sin \omega_0 T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cdot \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-akT} \cdot \cos \omega_0 kT$	$\frac{z^2 - z \cdot e^{-aT} \cdot \cos \omega_0 T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$

Laplace- und Z-Transformation

Typische Regelstrecken und Regler

	zeitkontinuierlich: $G_S(s)$	zeitdiskret: $G_S(z)$
P-Glied, P-Regler	k_P	k_P
I-Glied	$\frac{1}{sT_1}$	$\frac{T}{T_1} \cdot \frac{1}{z-1}$ (Halteglied am Eingang)
I-Regler	$k_P \frac{1}{sT_n}$	$k_P \frac{T}{T_n} \frac{z}{z-1}$ (Halteglied am Ausgang)
I2-Glied	$\frac{1}{sT_1} \cdot \frac{1}{sT_2}$	$\frac{T^2}{2T_1T_2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$
D-Glied	sT_1	
D-Regler	$k_P sT_V$	$k_P \frac{T_V}{T} \frac{z-1}{z}$
Totzeitglied	e^{-sT_t}	z^{-m} mit $m = \text{int}(T_t/T)$
PT1-Glied	$\frac{k_P}{1 + s \cdot T_1}$	$k_P \cdot \frac{1-e^{-T/T_1}}{z-e^{-T/T_1}} = k_P \cdot \frac{1-a}{z-a}$ mit $a = e^{-T/T_1}$ berechnet mit sprunginvarianter Transformation
PT2-Glied	$\frac{k_P}{1 + 2 \cdot D \cdot T \cdot s + T^2 \cdot s^2}$	
DT1-Glied	$\frac{sT_2}{1 + sT_1}$	$\frac{T_2}{T_1} \frac{z-1}{z \cdot e^{-T/T_1}}$
PI-Regler	$k_P \cdot (1 + \frac{1}{s \cdot T_n})$	$k_P \cdot (1 + \frac{T}{T_n} \cdot \frac{z}{z-1})$
PID-Regler	$k_P \cdot (1 + \frac{1}{s \cdot T_n} + s \cdot T_V) = k_R \cdot \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d)}{sT_i}$	$k_P \cdot (1 + \frac{T}{T_n} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{T_V}{T} \cdot \frac{z-1}{z})$

Laplace- und Z-Transformation

Rücktransformation

zeitkontinuierlich: $F(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$	zeitdiskret: $F(z) = \frac{Z(z)}{N(z)}$
a) Partialbruchzerlegung für rationale Funktionen	
<p>$F(s)$ = echtes Polynom in s + echt gebrochen rationale Funktion</p> <ul style="list-style-type: none"> - im echten Polynom treten Glieder der Form $a \cdot s^i \quad \bullet \text{---} \circ \quad a \cdot \delta^{(i)}(t)$ $a \quad \bullet \text{---} \circ \quad a \cdot \delta(t) \quad \text{auf}$ - die echt gebrochen rationale Funktion wird in einen Partialbruch zerlegt $\begin{aligned} & \frac{A}{s} \quad \bullet \text{---} \circ \quad \sigma(t) \cdot [A \\ + & \frac{A_1}{s^2} \quad + A_1 \cdot t \\ + & \dots \quad + \dots \\ + & \frac{B}{s-p_1} \quad + B \cdot e^{p_1 t} \\ + & \frac{C}{s-p_2} \quad + C \cdot e^{p_2 t} \\ + & \frac{C_1}{(s-p_2)^2} \quad + C_1 \cdot t \cdot e^{p_2 t} \\ + & \dots \quad + \dots \quad] \end{aligned}$	<p>$F(z)$ = echtes Polynom in z + echt gebrochen rationale Funktion (nur wenn $m > n$)</p> <ul style="list-style-type: none"> - im echten Polynom treten Glieder der Form $a \cdot z^i \quad \bullet \text{---} \circ \quad a \cdot \delta(k+i) \quad \text{auf}$ - die echt gebrochen rationale Funktion wird in einen Partialbruch zerlegt $\begin{aligned} & \frac{A}{z} \quad \bullet \text{---} \circ \quad \sigma(k-1) \cdot A \\ + & \frac{A_1}{z^2} \quad + \sigma(k-2) \cdot A_1 \\ + & \dots \quad + \dots \\ + & \frac{B}{z-p_1} \quad + \sigma(k-1) \cdot [B \cdot p_1^{k-1} \\ + & \frac{C}{z-p_2} \quad + C \cdot p_2^{k-1} \\ + & \frac{C_1}{(z-p_2)^2} \quad + (k-1) \cdot C_1 \cdot p_2^{k-2} \\ + & \dots \quad + \dots \quad] \end{aligned}$

Laplace- und Z-Transformation

zeitkontinuierlich: $F(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$	zeitdiskret: $F(z) = \frac{Z(z)}{N(z)}$
b) nicht rationale Funktion	
<p>wenn möglich rationalen Anteil abspalten und Rest auf die Form</p> $F(s) = F_0(s) \cdot \frac{1}{1-e^{-sT}} \quad \bullet \text{---} \circ \quad f(t) = \sum_{v=0}^{\infty} f_0(t-vT)$ <p>bringen (funktioniert meist bei periodischen Funktionen); sonstige Fälle sh. Literatur, z.B. G.Doetsch, Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplacetransformation, Oldenbourg-Verlag</p>	

Weitere Rücktransformationmethoden für zeitdiskrete Funktionen $F(z) = \frac{Z(z)}{N(z)}$

c) direkte Polynomdivision

$$Z(z) : N(z) = f(0) + f(1) \cdot z^{-1} + f(2) \cdot z^{-2} + \dots$$

Achtung: führt im allgemeinen auf eine unendliche Reihe, dh. die Division "geht nicht auf":

Bsp.: $F(z) = \frac{z-1}{z^2-1} = z^{-1} : z^2-2 = 0 \cdot z^0 + z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + 2z^{-3} + 0 \cdot z^{-4} + 4z^{-5} + \dots$

$\bullet \text{---} \circ \quad f(k) = \{ 0, 1, 0, 2, 0, 4, \dots \}$

Laplace- und Z-Transformation

d) Rekursionsformel
$$F(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}} = \frac{b_0z^n + b_1z^{n-1} + b_2z^{n-2} + \dots + b_mz^{n-m}}{a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_n}$$

$$f(k) = \frac{1}{a_0} \cdot [-a_1 \cdot f(k-1) - \dots - a_n \cdot f(k-n) + b_0 \cdot \delta(k) + \dots + b_m \cdot \delta(k-m)] \quad \text{mit } f(k) = 0 \text{ für } k < 0$$

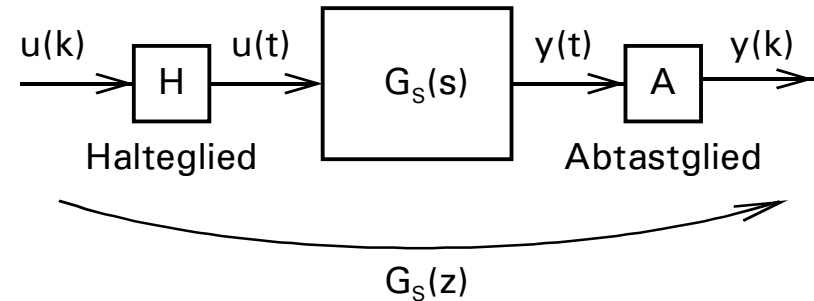
Bsp.:
$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2}{z^3 - 0,75z - 0,25} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 0,75z^{-2} - 0,25z^{-3}}$$

→
$$f(k) = 0,75 f(k-2) + 0,25 f(k-3) + \delta(k) + 2 \delta(k-1)$$

k	f(k)
0	$\delta(0) = 1$
1	$2 \cdot \delta(0) = 2$
2	$0,75 \cdot 1 = 0,75$
3	$0,75 \cdot 2 + 0,25 \cdot 1 = 1,25$
4	...

Laplace- und Z-Transformation

Umrechnung zeitkontinuierlicher in zeitdiskrete Übertragungsfunktionen



a) exakte Umrechnung $z = e^{sT}$:

$$G_S(z) = G_S(s = \frac{1}{T} \ln z)$$

exakt, aber analytisch in der Regel nicht auswertbar

b) grobe Näherung: $s = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z}$

$$G_S(z) = G_S(s = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z})$$

Euler-Formel

c) frequenzinvariante Transformation: Näherungsweise gleicher Frequenzgang bis zur halben Abtastfrequenz

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

$$G_S(z) = G_S(s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1})$$

Tustin-Formel ('bilineare Transformation')

d) sprunginvariante Transformation: Identische Sprunganwort bei den Abtastzeitpunkten

$$G_S(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \{ h(t = kT) \} = \frac{z-1}{z} \cdot H(z) \quad \text{mit } h(t) = \text{Sprunganwort}$$

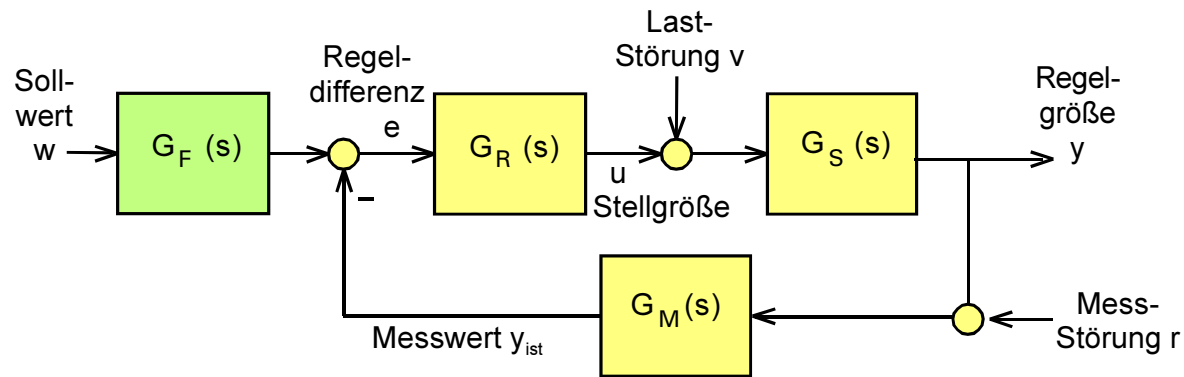
b) bis c) sind Näherungen! Für Stabilitätsbetrachtungen liefert lediglich die Näherung d) hinreichend kritische Werte.

Anhang: Bemerkungen und Hinweise für Fortgeschrittene

A.1	Allgemeine Betrachtungen zum Reglerentwurf (zu Kap. 4.1).....	2
A.2	Entkopplung von Führungs- und Störverhalten (zu Kap. 4.1).....	5
A.3	Anschauliche Ableitung der Hurwitz-Stabilitätsbedingung (zu Kap. 4.7).....	7
A.4	Polkompensation (zu Kap. 4.9)	9
A.5	Stabilitätskriterium nach Nyquist (zu Kap. 4.8)	10
A.6	Z-Übertragungsfunktionen für zeitdiskrete Regelkreise (zu Kap. 4.5).....	12

A.1

Allgemeine Betrachtungen zum Reglerentwurf (zu Kap. 4.1)



Offener Regelkreis

$$G_O(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)$$

Regelgröße:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_F(s) \cdot G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}}_{\text{Führungsverhalten } G_W(s)} \cdot W(s) + \underbrace{\frac{G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}}_{\text{(Last-) Störverhalten } G_V(s)} \cdot V(s) + \underbrace{\frac{-G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}}_{\text{(Mess-) Störverhalten } G_{YR}}$$

Stellgröße:

$$U(s) = \underbrace{\frac{G_F(s) \cdot G_R(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}}_{\text{Beitrag des Sollwerts } G_{UW}(s)} \cdot W(s) + \underbrace{\frac{-G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}}_{\text{Beitrag der Laststörung } G_{UV}(s)} \cdot V(s) + \underbrace{\frac{-G_R(s) \cdot G_M(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}}_{\text{Beitrag der Messstörung } G_{UR}}$$

Übliche Situation bzw. Systemauslegung:

- Regelstrecke hat bei hohen Frequenzen Tiefpassverhalten ≥ 2 . Ordnung, d.h. $|G_S(s \rightarrow \infty)| = 0$
- Führungsfilter u. Messglied: P-Glieder bzw. Tiefpässe mit Verstärkung $G_F(s=0) = G_M(s=0) = 1$
- Messstörung r klein, aber hochfrequent, z.B. Rauschen. Laststörung v niederfrequent

A.1

Statisches Verhalten (falls $G_F(s=0)=G_M(s=0)=1$ ist)

- Wenn Regler I-Anteil hat, d.h. $G_R(s=0) \rightarrow \infty$, Führungsverhalten ohne bleibende Regelabweichung ($G_W(s=0)=1$), konstante Laststörungen werden ausgeregelt ($G_V(s=0)=0$), konstante Messstörungen bleiben voll wirksam ($G_{YR}(s=0) = -1$).
- Erforderliche Stellgröße $U(s=0) \approx \frac{1}{G_S(s=0)} W(s=0) - V(s=0)$ wenn $R(s=0)$ vernachlässigt wird
- Maximaler (minimaler) Sollwert muss so begrenzt werden, dass maximal (minimal) zulässige Stellgröße nicht überschritten (unterschritten) wird.

Dynamisches Verhalten

- Für gutes Führungsverhalten Regler so auslegen, dass $G_W(s)=1$ bis zu einer möglichst hohen Grenzfrequenz, d.h. ω_D im offenen Regelkreis möglichst groß, aber ausreichende Phasenreserve φ_R bzw. Betragsreserve B_R .
- Hochfrequente Laststörungen werden durch das Tiefpassverhalten der Regelstrecke meist hinreichend ausgefiltert.
- Bei niederfrequenten Laststörungen, d.h. kleine s , hat der Regler im wesentlichen I-Verhalten, d.h. $G_R(s) \approx k_P / sT_n$. Für gutes Laststörverhalten, d.h. $G_V(s) \approx 1/G_R(s)$ möglichst klein, sollte k_P / T_n möglichst groß werden, d.h. große Verstärkung und kleine I-Zeitkonstante. Beides führt leider zu kleinem φ_R .
- Wählt man ein kleines φ_R für gutes Störverhalten, kann das schlecht gedämpfte Führungsverhalten, d.h. großes Überschwingen bei Sollwertsprüngen, durch ein Führungsfilter $G_F(s)$ mit PT1-Verhalten verbessert werden.

A.1

- Toleranzen der Regelstrecke verändern die Phasen- und Betragsreserve. Bei größerer Streckenverstärkung $G_S \uparrow \rightarrow B_R, \varphi_R \downarrow$. Einfluss von Toleranzen der Zeitkonstanten variiert.
- Sollwertsprünge Δw führen bei Reglern ohne D-Anteil zu Stellgrößen sprüngen $\Delta u = k_p \cdot \Delta w$. Bei Reglern mit D-Anteil kommt es theoretisch zu einem Dirac-Impuls in der Stellgröße, d.h. das reale Stellglied geht dynamisch in die Begrenzung. Durch ein Tiefpassfilter im Sollwertfilter G_F oder im D-Anteil des Reglers (PIDT1-Regler) kann man den Impuls auf $\Delta u = k_p \cdot T_V / T_1 \cdot \Delta w$ begrenzen (T_1 Zeitkonstante des Tiefpasses, k_p Reglerverstärkung, T_V D-Zeitkonstante des Reglers).
- Bei Reglern mit I-Anteil vergrößert sich die Ausregelzeit massiv, wenn der Regler dynamisch in die Begrenzung kommt, d.h. die theoretische Stellgröße über dem maximal zulässigen Wert des Stellglieds liegt. Abhilfe: Anti-Windup-Massnahmen (siehe Kapitel 4.11).
- Hochfrequente Messstörungen r führen zu einer sehr unruhigen Stellgröße u , da sie durch den D-Anteil des Reglers massiv verstärkt werden. Für höhere Frequenzen gilt bei einem PD- bzw. PID-Regler $|G_R(s \rightarrow \infty)| \rightarrow \infty$ und damit $|G_{UR}(s \rightarrow \infty)| \rightarrow \infty$, falls ein ideales Messglied ohne Tiefpassverhalten eingesetzt wird. Abhilfe: Begrenzung der Verstärkung für hohe Frequenzen auf $|G_{UR}(s \rightarrow \infty)| = k_p (1 + T_V / T_1)$, wenn im Messglied oder im D-Anteil des Reglers (PIDT1-Regler) ein Tiefpass mit der Zeitkonstante T_1 verwendet wird. Man muss aber $T_1 \ll T_V$ wählen, weil der Tiefpass den D-Anteil sonst unwirksam macht. Ist dies nicht ausreichend, muss man den D-Anteil ganz weglassen. Die Reglerverstärkung bei hohen Frequenzen ist dann nur noch k_p . (Hinweis: Baut man den Tiefpass in den D-Anteil des Reglers ein, begrenzt er auch die Stellgrößenamplitude bei Sollwertsprüngen, siehe oben).

A.2

Entkopplung von Führungs- und Störverhalten (zu Kap. 4.1)

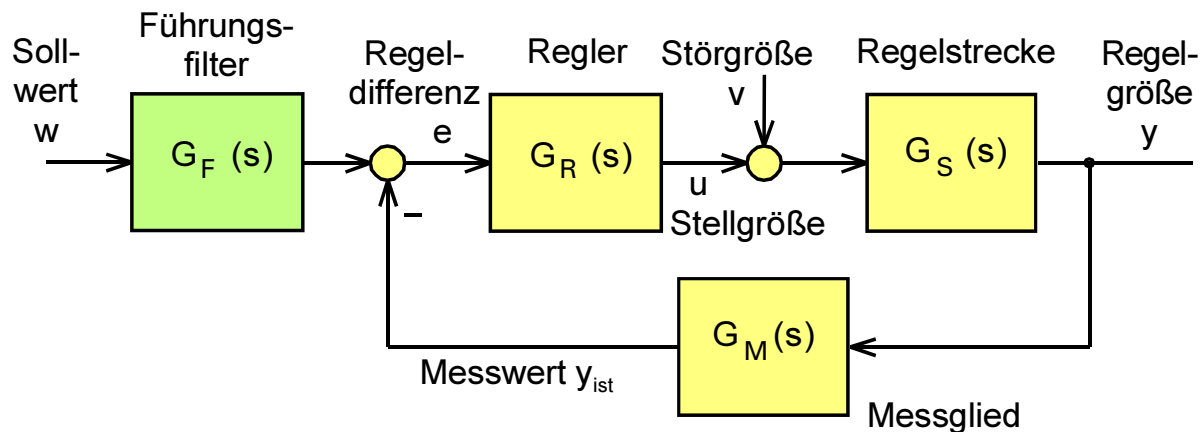
Führungs- und Störverhalten sind bekanntlich nicht unabhängig voneinander:

$$G_W(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}$$

$$G_V(s) = \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}$$

Dimensioniert man auf schnelle Ausregelung von Störungen, reagiert der Regler bei Sprüngen der Führungsgröße oft mit sehr starkem Überschwingen (z.B. bei Auslegung nach Ziegler-Nichols). Legt man das Störverhalten bewusst zurückhaltend aus, um das System nicht zu ‚nervös‘ zu machen, wird das Führungsverhalten oft zu langsam. Um das Führungs- und das Störverhalten (teilweise) zu entkoppeln, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- Führungsgrößenfilter $G_F(s)$ im Sollwert-Pfad



Neue Führungs-ÜF:

$$G_W^*(s) = G_F(s) \cdot G_W(s)$$

$$\text{z.B. } G_F(s) = \frac{1+sT_o}{1+sT_u}$$

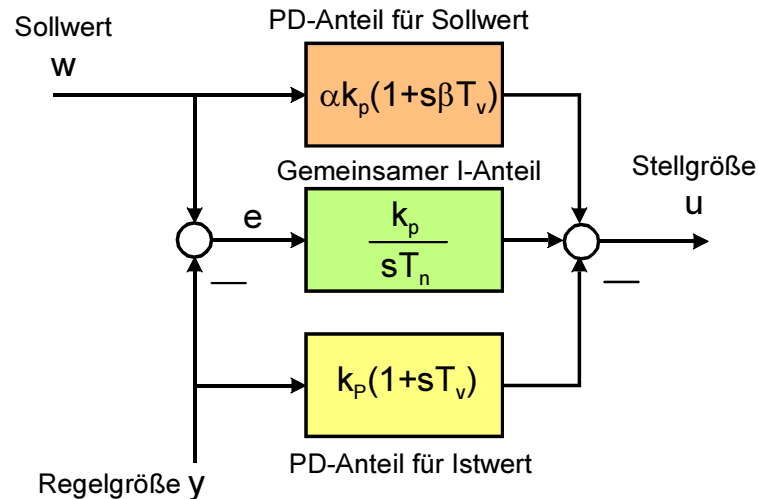
(PDT1, Lead-Lag-Glied)

Wählt man $T_u > T_o$, werden Führungssprünge gedämpft, bei $T_u < T_o$ verstärkt.

Stör-ÜF bleibt unverändert.

A.2

- PID-Regler mit unterschiedlicher Verstärkung und Differenzierzeitkonstante für Führungs- und Störgröße



Mit $\alpha, \beta > 1$ kann man das Führungsverhalten schneller, mit $\alpha, \beta < 1$ langsamer machen als das Störverhalten.

Häufig wählt man z.B. $\beta = 0$, um den Diracstoß in der Stellgröße bei Sollwertsprüngen zu vermeiden.

Der gemeinsame I-Anteil sorgt weiter dafür, daß keine bleibenden Regelabweichungen entstehen.

A.3

Anschauliche Ableitung der Hurwitz-Stabilitätsbedingung (zu Kap. 4.7)

- System 1. Ordnung $G(s) = \frac{\dots}{a_0 + s a_1}$

Annahme: Es sei $a_1 > 0$, keine Einschränkung, da Nenner und Zähler immer mit -1 multipliziert werden können

Berechnung des Pols der ÜF: $a_0 + s a_1 = 0 \rightarrow$ Pol bei $s_p = -\frac{a_0}{a_1}$

Pol liegt in der linken s-Halbebene, d.h. $s_p < 0$, wenn $a_0 > 0$ (da bereits $a_1 > 0$ war).

- System 2. Ordnung $G(s) = \frac{\dots}{a_0 + s a_1 + s^2 a_2}$ (Es sei wieder $a_2 > 0$ wie oben)

Berechnung der Pole der ÜF: $a_0 + s a_1 + s^2 a_2 = 0 \rightarrow$ Pol bei $s_{p1/2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_2}$

Fallunterscheidung für das Argument der Wurzelfunktion

Fall I: Falls $a_1^2 - 4 a_0 a_2 < 0$, d.h. Wurzel $\sqrt{\dots}$ imaginär

\rightarrow komplexe Pole in der linken s-Halbebene, wenn $\operatorname{Re}\{s_{p1/2}\} = \frac{-a_1}{2 a_2} < 0 \rightarrow a_1 > 0$
(da bereits $a_2 > 0$ war)

Außerdem muss $a_0 > 0$ sein, weil sonst $a_1^2 - 4 a_0 a_2 < 0$ nicht möglich, da $a_2 > 0$ ist.

Fall II: Falls der Ausdruck unter der Wurzel $a_1^2 - 4 a_0 a_2 > 0$, d.h. Wurzel $\sqrt{\dots}$ reell

- Damit die Pole in der linken s-Halbebene liegen, muss $a_1 > 0$ sein, sonst wäre $-a_1 + \sqrt{\dots} > 0$. Außerdem muss $a_0 > 0$ sein, sonst wäre ebenfalls $-a_1 + \sqrt{\dots} > 0$, weil dann $\sqrt{\dots} > a_1$ ist.

A.3

- System 3. Ordnung $G(s) = \frac{\dots}{a_0 + s a_1 + s^2 a_2 + s^3 a_3} = \frac{\dots}{c_0 + s c_1} \cdot \frac{\dots}{1 + s b_1 + s^2 b_2}$

Lässt sich darstellen als Reihenschaltung eines Systems 1. und eines Systems 2. Ordnung. Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich lassen sich c_0, c_1, b_1, b_2 in a_0, a_1, a_2 umrechnen. Das System 3. Ordnung ist nur stabil, wenn das System 1. Ordnung und das System 2. Ordnung jeweils stabil sind.

Analog lässt sich ein System n. Ordnung als Reihenschaltung eines Systems 1. Ordnung und eines Systems n-1. Ordnung darstellen, die beide stabil sein müssen, wenn das System n. Ordnung stabil sein soll. Die Herleitung der Hurwitz-Bedingungen kann also rekursiv erfolgen, Details siehe z.B. R.Jeltsch, M.Mansour: Stability Theory. Birkhäuser Verlag, 1996.

Insgesamt gilt:

Ein Regelkreis mit der Übertragungsfunktion $G_W(s) = \frac{\dots}{a_0 + s a_1 + s^2 a_2 + \dots + s^n a_n}$ ist

stabil, wenn die $k \times k$ Hurwitz-Determinanten $D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & \dots \\ 0 & \dots & & a_k \end{vmatrix} > 0$ für $k=1, \dots, n$

sind.

Polkompensation (zu Kap. 4.9)

- T_i bzw. $T_n = T_1$ ist eine gute Wahl, wenn $T_1 \gg T_2, T_3, \dots$ ist. Falls dagegen $T_1 \approx T_2, T_3, \dots$ ist, wird besser T_i bzw. $T_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots$ gewählt. Dies ist zwar strenggenommen keine Polkompensation, führt aber zu einem besseren dynamischen Verhalten.
- Sind die Zeitkonstanten nicht bekannt, z.B. bei einem gemessenen Frequenzgang, so wählt man $T_i = 1/\omega_{3dB}$, $T_d = 1/\omega_{6dB}$, dabei sind ω_{3dB} und ω_{6dB} die Kreisfrequenzen, bei denen die Verstärkung um $-3dB$ bzw. $-6dB$ kleiner ist als bei $\omega=0$ (**Betragskompensation nach Latzel**).

- Falls die Regelstrecke ein dominierendes konjugiert komplexes Polpaar besitzt, d.h.

$$G_o(s) = G_R(s) G_S(s) G_M(s) = k_p \frac{1+sT_n+s^2T_nT_v}{sT_n} \cdot \frac{\dots}{(1+s2DT+s^2T^2)(1+sT_2)(1+sT_3) \dots} \cdot G_M(s)$$

mit $T > T_2, T_3, \dots$ und $D < 1$, so wählt man $T_n = 2DT$ und $T_nT_v = T^2 \rightarrow T_v = T^2/T_n = T/2D$.

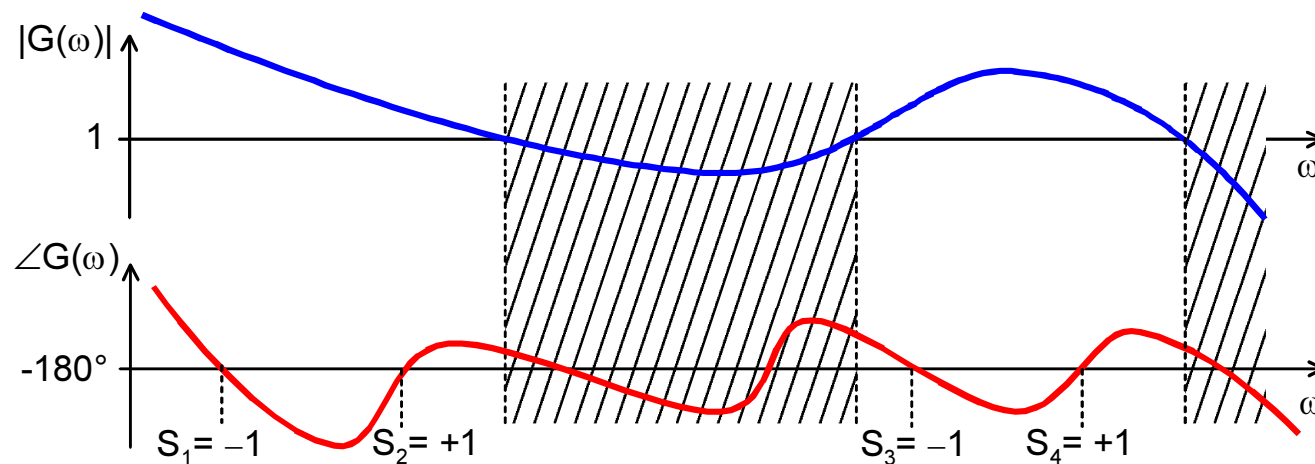
- Falls mit dem I-Anteil des Reglers keine Polkompensation möglich ist und man die Dimensionierung $T_i = 10/\omega_{\phi R}$ wählt, verliert man ca. 5° Phasenreserve. Bei $T_i = 5/\omega_{\phi R}$ würde man ca. 10° Phasenreserve verlieren.

A.5

Das **Stabilitätskriterium nach Nyquist** (zu Kap. 4.8) in der vorgestellten Form gilt nur für offene Regelkreise, die keine Pole in der rechten Halbebene und höchstens zwei Pole bei $s=0$ haben, d.h. ω_D und/oder ω_{krit} müssen eindeutig sein.

Für beliebige Regelstrecken ohne diese Einschränkungen gilt das **allgemeine Nyquist-Stabilitätskriterium**:

Beispiel:



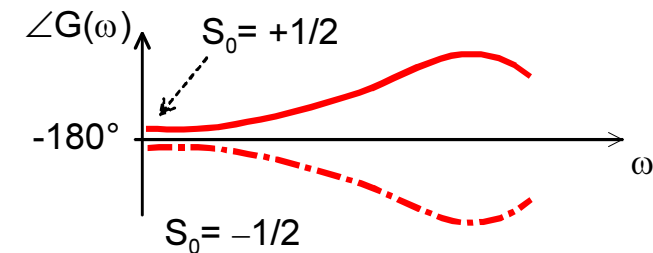
- Betrachtet werden nur diejenigen Frequenzbereiche, in denen $|G(\omega)| > 1$ ist.
- Die Schnittpunkte S_1, S_2, \dots des Phasenverlaufs $\angle G(\omega) = -180^\circ$ werden mit $S_i = -1$ bezeichnet, wenn die Phase bei zunehmendem ω kleiner wird, mit $S_i = +1$, wenn die Phase größer wird.

Bei Systemen höherer Ordnung kann die Phasennacheilung sehr viel größer werden als -180° . In diesem Fall sind alle Schnittpunkte bei $-(180^\circ + k \cdot 360^\circ)$, $k=0,1,\dots$ analog mitzuzählen. Die Anzahl der Pole des offenen Regelkreises in der rechten Halbebene sei n_R , die Anzahl der Pole auf der imaginären Achse sei n_I .

A.5

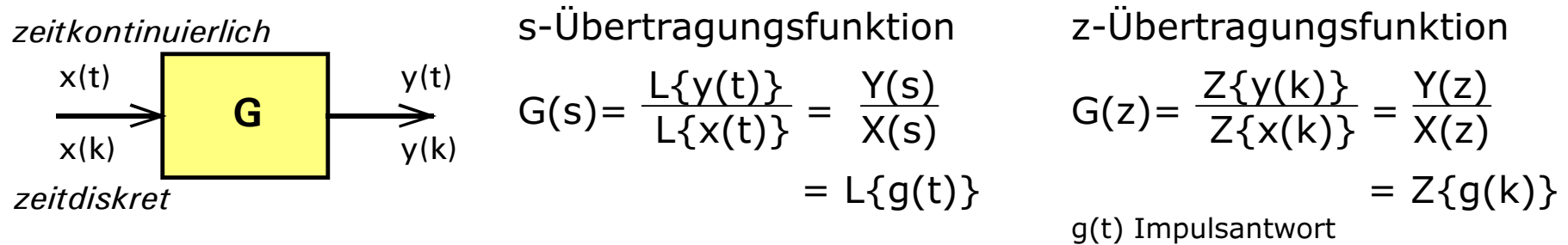
Der geschlossene Regelkreis ist

- für $n_I > 2$ in jedem Fall instabil.
- für $n_I = 0$ bzw. 1 stabil, wenn gilt: $\sum_{\text{alle } i} S_i = \frac{n_R}{2}$
- für $n_I = 2$ stabil, wenn gilt: $\sum_{\text{alle } i} S_i = \frac{n_R + 1}{2}$. Dabei (nur bei $n_I = 2$) wird das asymptotische Verhalten bei $\omega \rightarrow 0$ mit $S_0 = +\frac{1}{2}$ bzw. $-\frac{1}{2}$ mitgezählt:



A.6

Z-Übertragungsfunktionen für zeitdiskrete Regelkreise (zu Kap. 4.5)



Zeitbereich	Frequenzbereich	
zeitkontinuierlich	L-(Laplace)-Transformation	
$y(t)$	$Y(s) = \int_{t=0}^{\infty} y(t) e^{-s t} dt$	
zeitdiskret:	Laplace-Transformation	Z-Transformation (Definition)
$y(k \cdot T) = y(k) = y(t) \cdot \delta(t - kT)$ Abtastung $t = k \cdot T$ $k = 0, 1, 2, \dots$ mit $\delta(t - kT) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = kT \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ <i>Kronecker-Funktion</i>	$Y(s) =$ $= \int_{t=0}^{\infty} y(t) \cdot \delta(t - kT) \cdot e^{-st} dt$ $= \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) e^{-s k T}$	Einführung der Abkürzung $z = e^{sT}$ $Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) z^{-k}$

A.6

Die Rechenregeln der L-Transformation gelten analog auch für die Z-Transformation

z.B. **Zeitverschiebung** $y(t-T_d)$ $\circ \rightarrow \bullet$ $Y(s) \cdot e^{-s T_d}$

mit $T_d = n \cdot T$: $Z\{y(k-n)\} = Y(z) \cdot z^{-n}$ (für $n \geq 0$)

Anwendung **Differenzieren** $\frac{dy(t)}{dt}$ $\circ \rightarrow \bullet$ $s \cdot Y(s)$ d.h. $s \rightarrow \frac{1}{T} (1 - z^{-1}) = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z}$

$$Z\left\{\frac{\Delta y(k)}{T}\right\} = Z\left\{\frac{y(k) - y(k-1)}{T}\right\} = \frac{1}{T} [1 - z^{-1}] Y(z) = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z} Y(z)$$

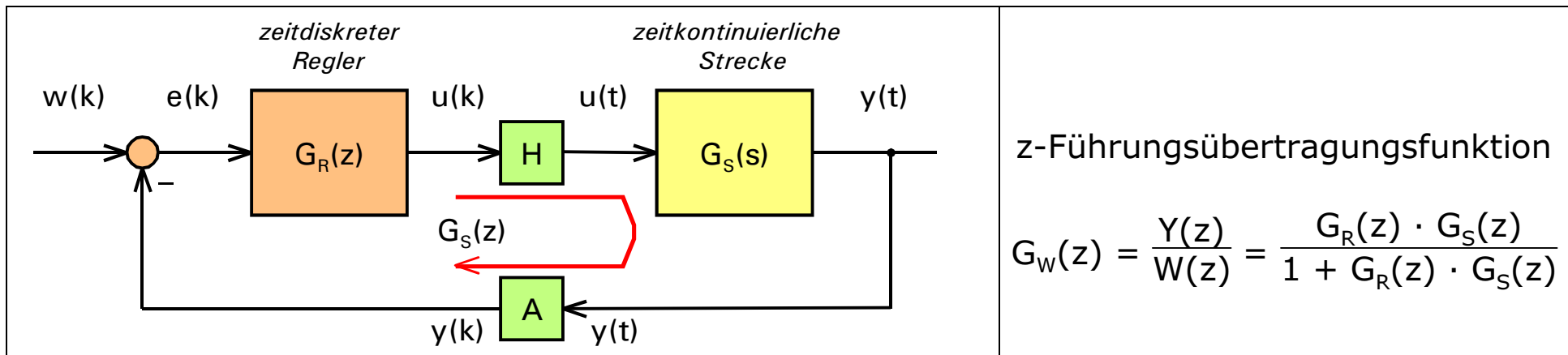
Anwendung **Integrieren** $\int y(t) dt$ $\circ \rightarrow \bullet$ $\frac{1}{s} \cdot Y(s)$

Mit der Analogie $s \rightarrow \frac{1}{T} \frac{z-1}{z}$: $Z\{\sum y(k)\} = T \frac{z}{z-1} Y(z)$

Anwendung auf die Übertragungsfunktion des PID-Reglers:

Zeitkontinuierlicher PID-Regler (additive Form)	$G_R(s) = k_p + k_p \frac{1}{s T_n} + k_p s T_v$ <p style="text-align: center;">P I D</p>
Zeitdiskreter PID-Regler	$G_R(z) = k_p + k_p \frac{T}{T_n} \frac{z}{z-1} + k_p \frac{T_v}{T} \frac{z-1}{z}$

z-Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises



Für den zeitdiskreten Regelkreis ergibt sich dieselbe Struktur der Führungsübertragungsfunktion wie für den zeitkontinuierlichen Regelkreis, allerdings müssen dabei nicht nur der Regler mit $G_R(z)$, sondern auch die **Regelstrecke** (einschließlich des **Abtast-** und des **Halteglieds**) mit $G_S(z)$ durch **z-Übertragungsfunktionen beschrieben** werden.

Diskretisierung der s-Übertragungsfunktion der Strecke:

- Theoretisch korrekte Lösung: $z = e^{sT} \rightarrow s = \frac{\ln z}{T} \rightarrow G_S(z) = G_S(s = \frac{\ln z}{T})$ praktisch unbrauchbar
- Näherung Rechteckregel: $s \approx \frac{1-z^{-1}}{T} \rightarrow G_S(z) = G_S(s \approx \frac{1-z^{-1}}{T})$ mäßig genau
- Sprunginvariante Transformation: $\rightarrow G_S(z) = (1-z^{-1}) \cdot Z\{h(t=kT)\}$
berücksichtigt das Abtast- und das Halteglied korrekt mit $h(t)$ Sprungantwort der Regelstrecke

A.6

Ableitung der sprunginvarianten Transformation:

- Eine Übertragungsfunktion ist die L- bzw. Z-Transformierte der Impulsantwort $g(t)$ bzw. $g(kT)$ einer Strecke.
- Vorgesaltetes Halteglied macht aus Einheitsimpuls $u(k)=\delta(k)$ eine Folge von zwei Sprüngen $u(t)=\sigma(t)-\sigma(t-T)$
- Die Sprungantwort der Regelstrecke beim Eingangssignal $\sigma(t)$ sei $h(t)$
- Die Antwort der Regelstrecke einschliesslich Halteglied auf $u(t)$ ist damit $h(t) - h(t-T)$
- Die Antwort wird durch das Abtastglied wieder abgetastet, d.h. $t=kT$ $h(kT) - h(kT-T)$
- Zusammen mit der Regel zur Zeitverschiebung der z-Transformation ergibt sich

$$G_S(z) = Z\{ h(kT) - h(kT-T) \} = Z\{ h(kT) \} - Z\{ h(kT-T) \} = (1 - z^{-1}) \cdot Z\{ h(kT) \}$$

Beispiele

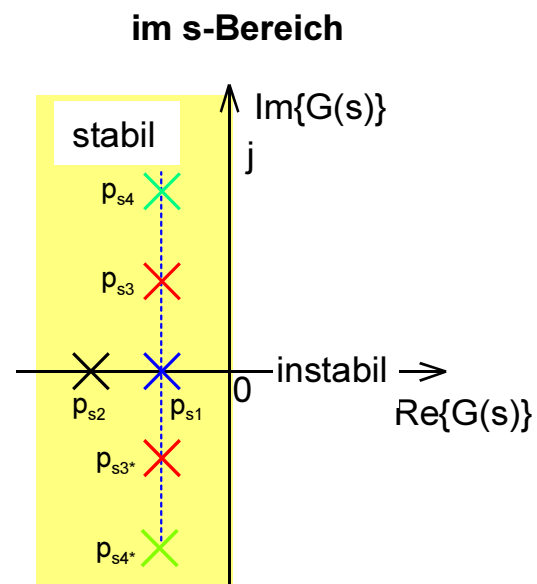
Anhang z-Trafo

Integralglied	Sprungantwort für $u(t)=\sigma(t)$	Sprunginvariante Transformation
$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{sT_1}$	$h(t) = \frac{t}{T_1}$ $\rightarrow h(k) = \frac{kT}{T_1}$	$H(z) = \frac{T}{T_1} \frac{z}{(z-1)^2}$ $\rightarrow G(z) = \frac{z-1}{z} H(z) = \frac{T}{T_1} \frac{1}{z-1}$
PT1-Glied $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{v}{1+sT_1}$	$h(t) = v (1 - e^{-t/T_1})$ $\rightarrow h(k) = v (1 - e^{-kT/T_1})$	$H(z) = v \frac{z \cdot (1 - e^{-T/T_1})}{(z-1)(z - e^{-T/T_1})} = v \frac{z \cdot (1-a)}{(z-1)(z-a)}$ $\rightarrow G(z) = v \frac{1 - e^{-T/T_1}}{z - e^{-T/T_1}} = v \frac{1-a}{z-a} \text{ mit } a = e^{-T/T_1}$
DT1-Glied $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{sT_2}{1+sT_1}$	$h(t) = \frac{T_2}{T_1} e^{-t/T_1}$	$G(z) = \frac{T_2}{T_1} \frac{z-1}{z - e^{-T/T_1}} = \frac{T_2}{T_1} \frac{z-1}{z-a} \text{ mit } a = e^{-T/T_1}$

Stabilität

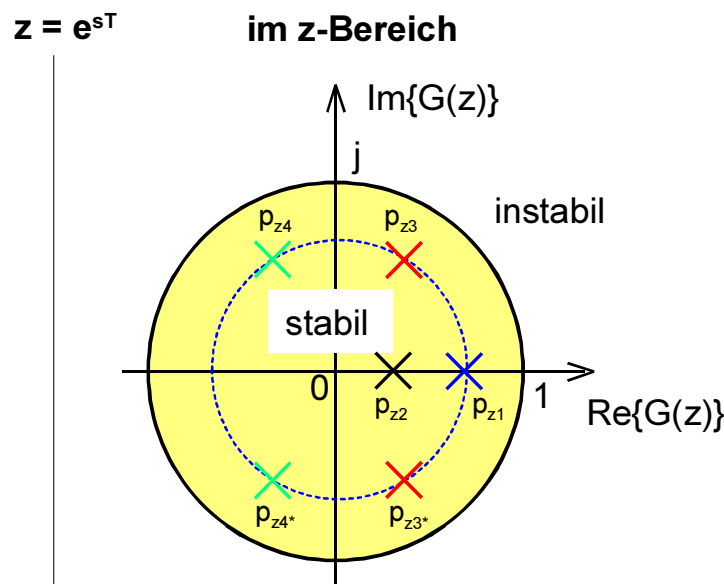
Zeitkontinuierliche Systeme sind stabil, wenn alle Pole der Übertragungsfunktion in der linken s-Halbebene liegen.

Zeitdiskrete Systeme sind stabil, wenn alle Pole der Übertragungsfunktion im Einheitskreis der z-Ebene liegen, d.h. für die Pole gilt $|z| < 1$:



stabil, wenn Pole in der linken Halbebene

$$p_s = -\sigma \pm j \omega$$



stabil, wenn Pole im Einheitskreis

$$p_z = e^{p_s T} = e^{-\sigma T} \cdot e^{\pm j \omega T}$$

Eingeschwungener Zustand

Für den eingeschwungenen Zustand und die bleibende Regelabweichung gelten dieselben Überlegungen wie in Kapitel 4.2. Im eingeschwungenen Zustand $t \rightarrow \infty$ ist:

$$s=0 \rightarrow z=e^{sT} \rightarrow z=1$$

$$G_W(s=0) \qquad G_W(z=1)$$

„Gleichstromverstärkung“

Frequenzgang

$$G_W(s=j\omega)$$

$$\rightarrow G_W(z=e^{sT} \text{ mit } s=j\omega)$$

$$= G_W(z=e^{j\omega T})$$

$$= G_W(z=\cos \omega T + j \sin \omega T)$$

A.6

Stör- oder Führungsübertragungsfunktion eines geschlossenen Regelkreises n. Ordnung

Zeitkontinuierlich

$$G(s) = \frac{\overset{\cdot}{\cdot}{\cdot}}{a_0 + s a_1 + s^2 a_2 + \dots + s^n a_n}$$

Zeitdiskret

$$G(z) = \frac{\overset{\cdot}{\cdot}{\cdot}}{a_0 + z a_1 + z^2 a_2 + \dots + z^n a_n}$$

dabei muss $a_n > 0$ sein
(gegebenenfalls Zähler und Nenner mit -1 multiplizieren)

Stabil nach Hurwitz, wenn folgende $n-1$ Bedingungen erfüllt sind:

- Für alle n : $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \overset{!}{>} 0$
(Die Faktoren dürfen weder negativ noch 0 sein!)

Zusätzlich

- bei $n=1,2$: keine weitere Bedingung
- bei $n=3$: $a_1 a_2 - a_0 a_3 \overset{!}{>} 0$
- bei $n=4$: $a_1 a_2 - a_0 a_3 \overset{!}{>} 0$
 $a_3 \cdot (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 \overset{!}{>} 0$
- bei $n \geq 5$: siehe Literatur

Stabil nach Schur-Cohn-Jury, wenn folgende $n+1$ Bedingungen erfüllt sind:

- Für alle n : $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \overset{!}{>} 0$

Zusätzlich

- bei $n=1$: $a_0 - a_1 \overset{!}{<} 0$
- bei $n=2$: $a_0 - a_1 + a_2 \overset{!}{>} 0$
 $a_2 \overset{!}{>} |a_0|$
- bei $n \geq 3$: siehe Literatur

Die Ableitung dieser Kriterien erfolgt rekursiv durch Berechnung der Pole, Einzelheiten siehe Literatur und Anhang.

A.6

Beispiel: Digitaler P-Regler mit PT1-Regelstrecke (mit $k_p=2$, $v=1$, $T_1=10\text{ms}$)

$$G_W(z) = \frac{k_p(1-d)}{z + k_p - (k_p+1)d} \quad \text{mit } d = e^{-T/T_1}$$

$\overline{a_1} \qquad \qquad \qquad a_0$

hier: $n=1$

Bei welcher Abtastzeit arbeitet dieser Regelkreis stabil?

- 1. Bedingung: $a_0 + a_1 \stackrel{!}{>} 0 \rightarrow 1 + k_p - (k_p+1)d \stackrel{!}{>} 0$
 $\rightarrow d = e^{-T/T_1} < 1$ ist für $T > 0$ immer erfüllt (trivial)
- 2. Bedingung: $a_0 - a_1 \stackrel{!}{<} 0 \rightarrow k_p - (k_p+1)d - 1 \stackrel{!}{<} 0$
 $\rightarrow d = e^{-T/T_1} > \frac{k_p-1}{k_p+1}$
 $\rightarrow T < -T_1 \cdot \ln \frac{k_p-1}{k_p+1} = -10\text{ms} \cdot \ln \frac{1}{3} = 11\text{ms}$

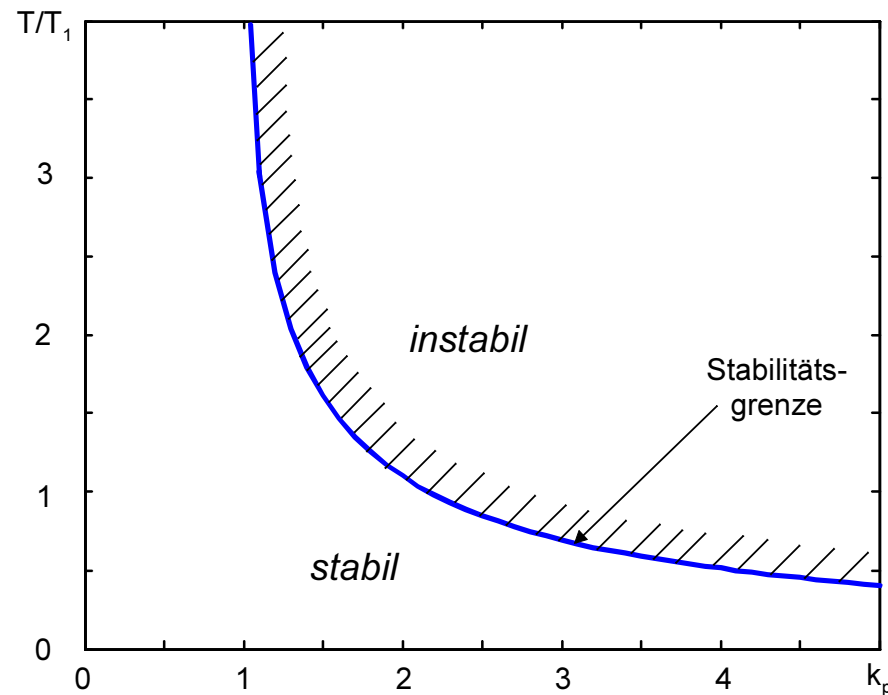
alternativ hätte man hier den Pol auch direkt ausrechnen können:

$$z_p = -k_p + (k_p+1)d \rightarrow \text{stabil wenn } |z_p| < 1 \rightarrow -k_p + (k_p+1)d < 1 \rightarrow d < 1 \rightarrow \dots$$
$$\text{und } k_p - (k_p+1)d < 1 \rightarrow d > \frac{k_p-1}{k_p+1} \rightarrow \dots$$

A.6

Der Zusammenhang zwischen maximal zulässiger Abtastzeit T und maximal zulässiger Reglerverstärkung k_p lässt sich grafisch darstellen. Der Bereich, in dem der Regelkreis stabil arbeitet, wird als Stabilitätsgebiet bezeichnet.

$$T < -T_1 \cdot \ln \frac{k_p - 1}{k_p + 1} \quad \text{bzw.} \quad k_p < \frac{1 + e^{-T/T_1}}{1 - e^{-T/T_1}}$$

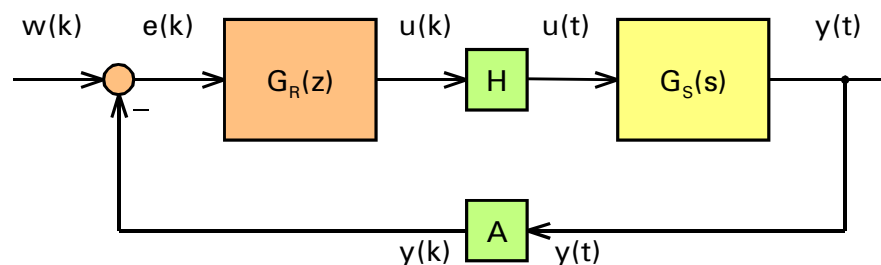


In ähnlicher Form kann man derartige Stabilitätsgebiete immer dann darstellen, wenn ein Regler mehrere Parameter hat.

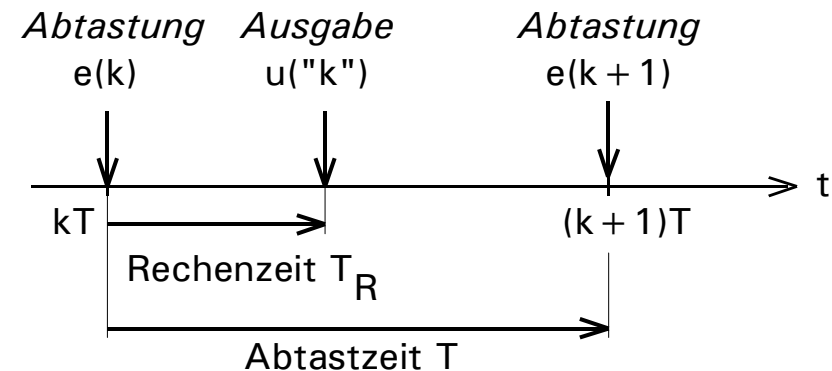
A.6

Berücksichtigung der Rechenzeit bei zeitdiskreten Regelkreisen

Bei der Berechnung von $G_W(z)$ wurde stillschweigend angenommen, dass die Stellgröße $u(k)$ gleichzeitig mit der Abtastung von $e(k)$ ausgegeben werden kann.



In Wirklichkeit muss die Stellgröße natürlich zuerst berechnet werden:



Für die Berechnung ist die Rechenzeit T_R notwendig. Die Berücksichtigung als Totzeit in der Regelstrecke ist theoretisch bei $0 < T_R < T$ sehr kompliziert, weil die z-Transformation Signale nur synchron im Abtastraster beschreiben kann. Daher wählt man einen der Extremfälle:

- Falls $T_R \ll T$ ist, kann die Rechenzeit vernachlässigt werden.

Beispiel: Zeitdiskrete Nachbildung eines I-Reglers

- ohne Rechenzeit: $u(k) = u(k-1) + \frac{1}{T_n} \cdot e(k) \cdot T$
 $\rightarrow G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{T_n} \cdot \frac{z}{z-1}$

- Falls $T_R \approx T$ ist, wird die Rechenzeit als Totzeit berücksichtigt:

$$G_R(z) \Big|_{\text{mit Rechenzeit}} = z^{-1} \cdot G_R(z) \Big|_{\text{ohne Rechenzeit}}$$

- mit Rechenzeit $T_R \approx T$: $u(k) = u(k-1) + \frac{1}{T_n} \cdot e(k-1) \cdot T$
 $\rightarrow G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{T_n} \cdot \frac{1}{z-1}$